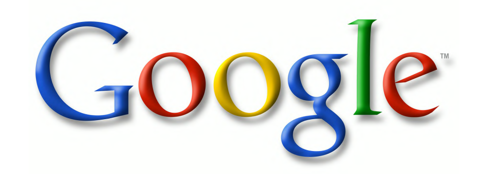
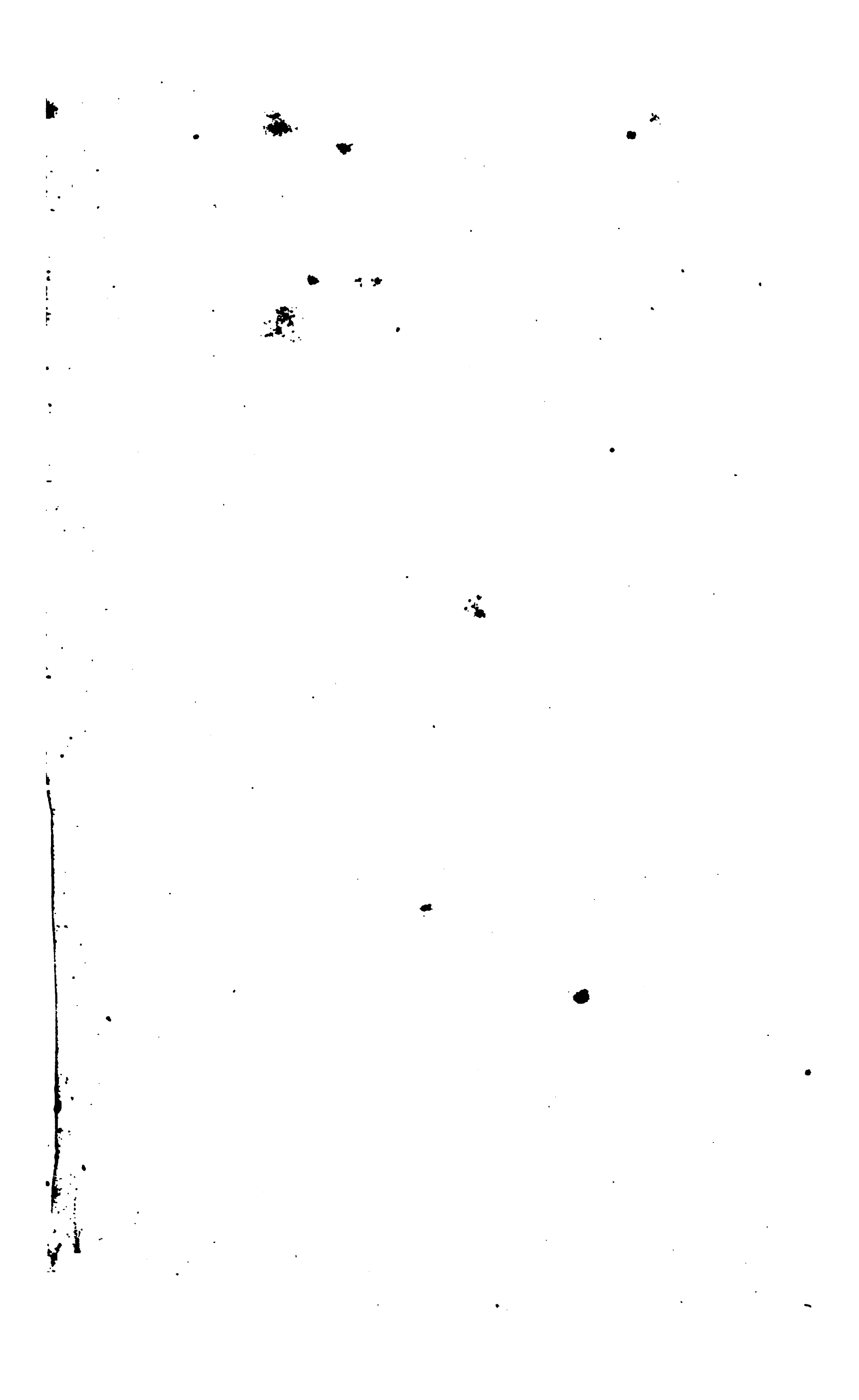

Google











LEHRBUCH

DER

ELECTROSTATIK

VON

TH. KÖTTERITZSCH,

DR. PHIL., LEHRER AM GYMNASIUM ZU GRIMMA.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1872.



SEINEM

HOCHVEREHRTEN LEHRER UND VÄTERLICHEN FREUNDE

HERRN

DR. E. LÖSCHE,

PROFESSOR DER PHYSIK AM KÖNIGL. POLYTECHNIKUM
ZU DRESDEN

AUS LIEBE UND DANKBARKEIT

GEWIDMET

VOM

VERFASSER.



Vorwort.

Wenn ich es wagte, dem vorliegenden Werke den Titel eines „Lehrbuches“ zu geben, und wenn somit das vorliegende Werk als erstes seiner Art auftritt, so glaubte ich die Berechtigung dazu in der Strenge zu finden, mit der ich im 2. Kapitel die elektrostatischen Probleme auf drei höchst einfache und ohne weiteres durch das Experiment als richtig nachweisbare Grundsätze gründen konnte. Wenn ich ferner namentlich im 4. Kapitel allgemeine und immer ausführbare Methoden angeben konnte, vermittels deren alle elektrostatischen Probleme mit verhältnissmässig einfacher Rechnung gelöst werden können, so war damit das ganze Gebiet der „Elektrostatik“ der Rechnung unterworfen, ein Gebiet, das wohl desswegen zu den schönsten der Physik gerechnet werden kann, weil es frei von Hypothesen ist, wenn man solche Grundlagen der Rechnung nicht mehr für Hypothesen gelten lässt, die ohne weiteres durch das Experiment als richtig nachgewiesen werden können. Es steht, wie das Schlusskapitel lehrt, zu hoffen, dass einst die Physik der Imponderabilien die Elektrostatik als ihre feste Grundlage zu betrachten haben wird.

Ausser den eben genannten Abschnitten wird der Kundige noch manches Neue in dem vorliegenden Werke finden. Ich war bestrebt, die Resultate mehr durch eine in Worten durchgeführte Schlussfolgerung, als durch Rechnung zu gewinnen, indem ich die Eleganz des letzteren Weges durch die Uebersichtlichkeit des ersteren zu ersetzen suchte; wünschte

ich doch durch das vorliegende Werk nicht nur dem mathematischen Leser, sondern auch dem experimentirenden Physiker zu nützen.

Das Bestreben, dem vorliegenden Werke seinen Titel mit Recht geben zu können, bewog mich auch, Manches der vorhandenen Literatur unberücksichtigt zu lassen, nämlich alle die Rechnungen, die auf Hypothesen gegründet waren, welche praktisch unausführbare Postulate enthalten und bei welchen man nur zu sehr fühlt, wie der Rechnende im Voraus die Resultate gekannt hat, die er am Ende herausrechnet. Soll eine Theorie von einer gewissen Reihe von Naturerscheinungen auf festem Grunde beruhen, so darf sie sich vor ihren äussersten Consequenzen nicht scheuen und muss der Rechnung alle die Axiome zu Grunde legen, auf der sie selbst beruht. Nur das Endresultat der Rechnung kann dann lehren, welche Grössen zu klein sind, als dass sie noch das Experiment beobachten liesse.

Wieder andere Arbeiten sind im Gange des vorliegenden Lehrbuches mehr berücksichtigt worden, als das unbedingte Bedürfniss verlangt hätte; ich hielt es aber für meine Pflicht, jene Arbeiten in der angewandten Weise zu berücksichtigen, weil sie gleichsam geschichtliche Marksteine bilden, an denen der Ideengang des menschlichen Geistes studirt werden kann, der sich anstrengte, anscheinend verworrene Naturerscheinungen einem einfachen, aber um so erhabeneren, Naturgesetze zu unterwerfen.

So möge denn diese Schrift sich ihren Weg bahnen und vielleicht Veranlassung geben, auch die Elektrodynamik auf feste Grundlagen zu stellen.

Grimma d. 9. Juni 1871.

Der Verfasser.

Inhalt.

Capitel I.
Die Potentialfunction und das Potential.

Capitel II.

Die allgemeinen Bedingungen für das elektrische Gleichgewicht.

Capitel III.

Besondere Methoden zur Bestimmung der Dichtheit, mit welcher sich eine gegebene Elektricitätsmenge im Gleichgewichtszustande auf Leitern vertheilt.

Capitel V.

Die auf elektrisirte Körper ausgeübten Kraftwirkungen.

Capitel VI.

Einige Folgerungen aus den bisher erlangten theoretischen Resultaten der Elektrostatik.

Die einschlagende Literatur ist immer am Schlusse eines jeden Capitels übersichtlich zusammengestellt.

Wenn sich im Texte Citate mit blossen Angaben eines Paragraphen finden, so ist immer der Paragraph desselben Capitels, in dem sich das Citat befindet, gemeint.

Capitel I.

Einleitung. Die Potentialfunction und das Potential.

§. 1.

Begriffsbestimmungen und Bezeichnungen.

Wirkt irgend eine Masse auf einen Punkt xyz, in welchem man sich die positive Masseneinheit concentrirt denkt, nach dem Newtonschen Gesetz, so übt das Massenelement $\varrho\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$ der gegebenen Masse, deren Dichtheit im Raumelement $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ durch ϱ dargestellt werde, eine Kraft auf den Punkt xyz aus, die nach Grösse und Vorzeichen dargestellt wird durch

$$a . \frac{\varrho\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r^2},$$

wenn $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$ die nur dem absoluten Werthe nach verstandene Entfernung des Punktes xyz vom Raumelemente $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ bezeichnet und a ein numerischer Werth ist, der nur abhängt von den Massstäben, nach denen die Massen, Entfernungen und Kräfte gemessen werden. Wir denken uns in der Folge solche Massstäbe zu Grunde gelegt, dass $a = 1$.

Die Kraftcomponenten Ξ, H und Z, welche die gegebene Masse auf den Punkt xyz ausübt in der Richtung der Coordinatenaxen, sind demnach:

$$\Xi = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \int_{\eta_0}^{\eta_1} \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \frac{\varrho\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r^2} . \frac{x - \xi}{r}$$

$$H = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \int_{\eta_0}^{\eta_1} \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \frac{\varrho\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r^2} . \frac{y - \eta}{r}$$

$$Z = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \int_{\eta_0}^{\eta_1} \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \frac{\varrho \, d\xi \, d\eta \, d\zeta}{r^2} \cdot \frac{z - \zeta}{r}.$$

Hierbei sind natürlich die Integrationsgrenzen ξ_1, ξ_0, η_1, η_0, ζ_1 und ζ_0 so zu wählen, dass sich die Integration erstreckt über den ganzen mit gegebener wirksamer Masse angefüllten Raum. Die unter den Integralzeichen vorkommenden Cosinus $\frac{x - \xi}{r}$, $\frac{y - \eta}{r}$, $\frac{z - \zeta}{r}$ des Neigungswinkels der Kraftcomponenten der Massenelemente gegen die Coordinatenaxen sind immer so zu verstehen, dass die Richtung als die positive angenommen ist, welche vom Raumelement $d\xi d\eta d\zeta$ nach dem Punkte xyz verläuft.

Die Kraftcomponenten Ξ, H, Z sind Functionen von x, y, z oder Functionen des Ortes (fonctions-de-point); in der That können sie auch, wie man leicht erkennt, der Reihe nach erhalten werden, indem man die Function

$$-V_1 = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \int_{\eta_0}^{\eta_1} \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \frac{\varrho \, d\xi \, d\eta \, d\zeta}{r}$$

partiell nach x, y und z differentiirt und wir können einfach

$$\Xi = -\frac{\partial V_1}{\partial x}, \; H = -\frac{\partial V_1}{\partial y}, \; Z = -\frac{\partial V_1}{\partial z}$$

setzen, wenn wir annehmen, dass die erwähnten Differentiationen unter den Integralzeichen ausführbar seien, d. h. dass die Function $- V_1$ allenthalben endlich und stetig sei.

Die Function $- V_1 = V$ ist ebenfalls eine Function des Ortes, wir nennen sie die Potentialfunction der gegebenen Masse auf den Punkt xyz.

Wir verstehen also unter der Potentialfunction V einer Masse auf einen Punkt xyz diejenige immer endliche und stetige Function des Ortes von der Form $V = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \int_{\eta_0}^{\eta_1} \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \frac{\varrho \, d\xi \, d\eta \, d\zeta}{r}$, deren negative partielle erste Derivirte nach x, y und z die von der Masse auf die im Punkte xyz concentrirte positive Masseneinheit ausgeübten Kraftcomponenten parallel den Coordinatenaxen darstellen.

Es folgt aus dieser Definition, dass die nach irgend einer beliebigen Richtung t genommenen negativen partiellen Derivirten von der Potentialfunction ebenfalls die in der Richtung t auf den Punkt xyz wirksame Kraft darstellen. Schliesst nämlich die Richtung t mit den Coordinatenaxen die Winkel α, β, γ ein, so ist

$$\cos\alpha = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad \cos\beta = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad \cos\gamma = \frac{\partial z}{\partial t},$$

und, wenn δ den Winkel zwischen der resultirenden Kraftwirkung K und der Richtung t bezeichnet, so ist die in letztere Richtung entfallende Kraftcomponente

$$T = K \cos\delta = \Xi \frac{\partial x}{\partial t} + H \frac{\partial y}{\partial t} + Z \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$= -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}\right) = -\frac{\partial V}{\partial t} \quad \text{q. e. d.}$$

Besitzt der Punkt xyz nicht die positive Masseneinheit, sondern etwa die Masse μ, so nennen wir das Product μV das Potential der gegebenen Masse auf den Massenpunkt im Punkte xyz.

Das Potential einer gegebenen Masse auf eine in einem Punkte xyz concentrirt gedachte andere Masse ist demnach diejenige Function des Ortes, deren negativer erster partieller Differentialquotient nach irgend einer Richtung t die in dieser Richtung wirksame beschleunigende Kraft darstellt.

Dem Potentiale und demnach auch der Potentialfunction kommt eine bestimmte mechanische Bedeutung zu. Bewegt sich nämlich der Massenpunkt μ aus einer beliebigen Anfangslage $x_0\, y_0\, z_0$ auf einer beliebigen Curve s in die Endlage xyz, so hat die von der gegebenen Masse ausgehende Kraft dabei eine Arbeit geleistet, die in leichtverständlichen Zeichen darstellbar ist durch:

$$L = -\int_{s_0}^{s_1} \mu \frac{\partial V}{\partial s} ds = -\left[(\mu V)_{x\,y\,z} - (\mu V)_{x_0\,y_0\,z_0}\right]$$

$$L = V'_{x_0\,y_0\,z_0} - V'_{x\,y\,z},$$

wenn wir kurz das Potential der gegebenen Masse auf die punktförmige Masse μ mit V' bezeichnen.

Ist die Anfangslage $x_0\, y_0\, z_0$ der gegebenen Masse unendlich weit entfernt, so erkennt man leicht aus dem Werthe $V' = \mu \int\limits_{\xi_0}^{\xi_1} \int\limits_{\eta_0}^{\eta_1} \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta_1} \frac{\varrho\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r}$, dass $V'_{x_0 y_0 z_0} = 0$, also für diesen Fall

$$L = - V'_{xyz} = - V'.$$

Wir kommen demnach zu einer zweiten Definition des Potentiales, nämlich:

Das Potential einer gegebenen Masse auf einen gegebenen Massenpunkt drückt die negative Arbeit aus, die von den aus den gegebenen Massen entspringenden Kräften ausgeübt werden muss, damit der Massenpunkt aus unendlicher Entfernung in die ihm im Raume angewiesene Lage auf beliebigem Wege übergeführt werde.

Giebt man dem Massenpunkt als Masse die positive Masseneinheit, so ist die eben für das Potential gegebene Erklärung auch eine Definition der Potentialfunction.

Ist anstatt eines Massenpunktes ein mit Masse von der Dichtheit ϱ' erfüllter Raum gegeben, so verstehen wir unter dem Potential der früheren Masse auf die neue Masse den Ausdruck

$$V'' = \int\limits_{\xi_2}^{\xi_3} \int\limits_{\eta_2}^{\eta_3} \int\limits_{\zeta_2}^{\zeta_3} V \varrho'\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

wenn die Integrationsgrenzen so gewählt sind, dass die Integration sich erstreckt über den ganzen neuen mit Masse von der Dichtheit ϱ' angefüllten Raum und wenn V bezeichnet die Potentialfunction der ursprünglichen Masse auf das Raumelement $d\xi\, d\eta\, d\zeta$.

Es besteht auch V'' aus den einzelnen Elementen von negativer Arbeit, die von der ursprünglichen Masse verrichtet werden muss, damit die einzelnen Elementartheilchen der neuen Masse in die ihnen angewiesenen Lagen im Raume auf beliebigem Wege aus unendlicher Entfernung übergeführt werden. Der ganze Werth von V'' stellt demgemäss

auch dar die negative Arbeit, die von der ursprünglichen Masse geleistet werden muss, um die neue Masse aus unendlicher Entfernung in ihre ihr im Raume angewiesene Lage überzuführen.

Ist ferner, unter Beibehaltung der Bedeutung der übrigen Zeichen, V_1 die Potentialfunction der ursprünglichen, V_2 die der neuen Masse, so ist auch

$$V'' = \int_{\xi_2}^{\xi_3}\int_{\eta_2}^{\eta_3}\int_{\zeta_2}^{\zeta_3} V_1\,\varrho'\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

$$= \int_{\xi_2}^{\xi_3}\int_{\eta_2}^{\eta_3}\int_{\zeta_2}^{\zeta_3}\left\{\int_{\xi_0}^{\xi_1}\int_{\eta_0}^{\eta_1}\int_{\zeta_0}^{\zeta_1}\frac{\varrho\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r}\right\}\varrho'\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

$$= \int_{\xi_0}^{\xi_1}\int_{\eta_0}^{\eta_1}\int_{\zeta_0}^{\zeta_1}\left\{\int_{\xi_2}^{\xi_3}\int_{\eta_2}^{\eta_3}\int_{\zeta_2}^{\zeta_3}\frac{\varrho'\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r}\right\}\varrho\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

$$= \int_{\xi_0}^{\xi_1}\int_{\eta_0}^{\eta_1}\int_{\zeta_0}^{\zeta_1} V_2\,\varrho\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

wenn V_1 und V_2 allenthalben endliche und stetige Functionen des Ortes sind.

Durch Vergleichung des ersten und letzten Werthes von V'' erkennt man, dass auch V'' darstellt die negative Arbeit, die von der neuen Masse geleistet werden muss, damit die ursprüngliche aus unendlicher Entfernung in die ihr im Raume angewiesene Lage übergeführt werde. Durch Vereinigung beider ebengenannten Definitionen erhalten wir weiter:

Das Potential einer gegebenen Masse auf eine gegebene andere ist die negative Arbeit, die geleistet werden muss, um durch Wechselwirkung beider Massen auf einander jede der beiden Massen aus beliebiger Lage in unendlicher Entfernung auf beliebigen Wegen in die ihnen im Raume angewiesenen Lagen überzuführen.

Anmerkung. Es ist in der Zeit nach G. Green gebräuchlich geworden den Namen Potential für Potentialfunction zu setzen. Wir sind hier, da doch ein be-

deutender Unterschied zwischen beiden sich aufstellen lässt, der ersten Namenclatur von G. Green gefolgt, wie auch schon Clausius und Betti in ihren Schriften gethan haben.

Man kann aus dem Begriff des Potentiales irgend einer Masse auf irgend eine andere leicht auf den mechanisch wichtigen Begriff des Potentiales irgend einer Masse auf sich selbst kommen, das nach dem vorhergehenden die negative Arbeit bedeuten muss, die geleistet wurde, um das gegebene Massensystem aus irgend einer Vertheilung über unendlich entfernte Räume in die gegebene Lage überzuführen, wenn diese Arbeit von der Kraftwirkung der gegebenen Massen auf einander selbst geleistet wurde.

Hat nämlich das gegebene Massensystem an irgend einer Stelle die Dichtheit ϱ, an irgend einer anderen, die aber auch mit der ersteren identisch sein kann, die Dichtheit ϱ', so denken wir uns die Dichtheiten ϱ und ϱ' derartig aus je zwei Theilen bestehend, dass

$$\varrho = \varrho_1 + \varrho_2 \qquad\qquad \varrho' = \varrho_1' + \varrho_2'$$

und es sei

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \tfrac{1}{2}\varrho\,; \quad \varrho_1' = \varrho_2' = \tfrac{1}{2}\varrho'.$$

Dann hesteht das Potential der gegebenen Masse auf sich selbst aus dem Potentiale der Masse mit der Dichtheit ϱ_1 auf die Masse mit der Dichtheit ϱ_2' vermehrt um das Potential der Masse mit der Dichtheit ϱ_2 auf die Masse mit der Dichtheit ϱ_1'. Ist also P das Potential der gegebenen Masse auf sich selbst und r die Entfernung der Volumenelemente dk und dk' mit den gegebenen Dichtheiten ϱ und ϱ', so ist

$$P = \int\int \frac{\varrho_1 \varrho_2'}{r}\, dk\, dk' + \int\int \frac{\varrho_2 \varrho_1'}{r}\, dk\, dk'$$

$$= \tfrac{1}{4}\int\int \frac{\varrho\varrho'}{r}\, dk\, dk' + \tfrac{1}{4}\int\int \frac{\varrho\varrho'}{r}\, dk\, dk'$$

$$P = \tfrac{1}{2}\int\int \frac{\varrho\varrho'}{r}\, dk\, dk'$$

Anmerkung. Man hat aus leicht begreiflichen Gründen den eben für P gefundenen Ausdruck das halbe Potential der gegebenen Masse auf sich selbst genannt.

Es ist aus der gegebenen Ableitung erkennbar, dass man ihn richtiger einfach das Potential der gegebenen Masse auf sich selbst nennt.

§. 2.
Eigenschaften der Potentialfunction und ihrer ersten Derivirten.

Mehrere Definitionen des vorigen Paragraphen setzten die allenthalben stattfindende Endlichkeit und Stetigkeit der Potentialfunction V voraus, es ist daher jetzt zu untersuchen, ob diese Voraussetzungen immer erfüllt sind.

Aus der Definitionsgleichung

$$V = \int_{\xi_0}^{\xi_1}\int_{\eta_0}^{\eta_1}\int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \frac{\varrho\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}}$$

erkennt man leicht, dass, so lange der Punkt xyz ausserhalb des mit Masse erfüllten Raumes liegt, V eine immer endliche und stetige Function des Ortes ist, die für unendlich entfernte Punkte verschwindet. Führt man in den Ausdruck von V gewöhnliche räumliche Polarcoordinaten ein, indem man setzt:

$$V = \int\int\int \frac{\varrho r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi}{\sqrt{r^2 + l^2 - 2rl\cos\gamma}}$$

wenn l der Radiusvector des Punktes ist, auf den sich V bezieht, und γ den Winkel bezeichnet, den r und l mit einander einschliessen, lässt man ferner l unendlich gross werden und schreibt

$$V = \frac{1}{l}\int\int\int \frac{\varrho r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi}{\sqrt{\frac{r^2}{l^2} + 1 - 2\frac{r}{l}\cos\gamma}},$$

so erkennt man, dass der Nenner unter dem Integralzeichen für ein unendliches l in 1 übergeht, und das dreifache Integral bedeutet alsdann die anziehende Masse. Wir sehen hieraus, dass für einen unendlich entfernten Punkt V so verschwindet, dass lV die wirksame Masse ergiebt.

Liegt aber der Punkt xyz im Innern oder auf der Oberfläche des mit Masse angefüllten Raumes, so enthält das Integral für V anscheinend unendliche Elemente, näm-

lich dann, wenn $x = \xi$, $y = \eta$ und $z = \zeta$. Nehmen wir aber diesen Punkt zum Pol eines gewöhnlichen räumlichen Polarcoordinatensystems, so brauchen wir nur den Werth von V zu bestimmen, so weit er herkommt von der Masse, die umschlossen ist von einer beliebig kleinen Kugelfläche, deren Mittelpunkt der Punkt $x\,y\,z$ ist, weil für die übrige Masse der Punkt $x\,y\,z$ ein äusserer Punkt ist, folglich die Potentialfunction derselben endlich und stetig sein muss. Nun ist, ausgedrückt in den gewöhnlichen räumlichen Polarcoordinaten r, θ, und φ

$$d\xi\,d\eta\,d\zeta = r^2 \sin\theta\; dr\; d\theta\; d\varphi.$$

Die Potentialfunction der genannten beliebig kleinen mit Masse angefüllten Kugel ist demnach

$$\int\int\int \frac{\varrho}{r}\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \int\int\int \varrho\, r \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi,$$

die Integration ausgedehnt über den ganzen Kugelraum. Im Mittelpunkte der Kugel, $r = 0$, bleibt also, wie man hieraus erkennt, die Potentialfunction ebenfalls endlich, wenn nicht die Massendichtheit ϱ daselbst in höherer Ordnung, als r zu Null wird, unendlich wird.

Es ist für das Folgende von Wichtigkeit, auch noch den Fall speciell zu untersuchen, wo sich die gegebenen Massen nur in einer unendlich dünnen Schicht oder auf einer Fläche befinden und hierbei verlangt wieder nur der Fall besondere Discussion, wo der Punkt $x\,y\,z$ auf dieser Fläche selbst liegt, und hierbei wieder nur die Stelle, die beliebig nahe um den Punkt $x\,y\,z$ herum liegt. Betrachten wir ein solch kleines Flächenstück, so wird es immer möglich sein, durch den Punkt $x\,y\,z$ eine Ebene so zu legen, dass keine der Normalen des Flächenstückes auf der Ebene senkrecht steht. Nehmen wir nun $x\,y\,z$ zum Pol eines gewöhnlichen ebenen Polarcoordinatensystemes in der angenommenen Ebene, indem wir die früheren Coordinaten ξ und η durch die Polarcoordinaten u und φ ersetzen, dagegen die dritte Coordinate ζ unverändert beibehalten, so ist, wenn λ den Winkel zwischen der Normale des Flächenelementes $d\sigma$ und der Axe der ζ bezeichnet

$$d\sigma = \frac{u\,du\,d\varphi}{\cos\lambda};$$

$$r = \sqrt{u^2 + \zeta^2} = u\sqrt{1 + \frac{\zeta^2}{u^2}}$$

und der zu untersuchende Theil der Potentialfunction ist

$$\int \frac{\varrho\,d\sigma}{r} = \int\int \frac{\varrho u\,du\,d\varphi}{u\cos\lambda\sqrt{1+\frac{\zeta^2}{u^2}}} = \int\int \frac{\varrho\,du\,d\varphi}{\cos\lambda\sqrt{1+\left(\frac{\zeta}{u}\right)^2}}.$$

Man erkennt auch hieraus wieder, dass auch in dem angenommenen Falle die Potentialfunction allenthalben endlich und stetig ist, vorausgesetzt nur, dass die Flächendichtigkeit ϱ nirgends unendlich ist.

Im Ganzen hat sich also ergeben:

Die Potentialfunction V ist eine allenthalben endliche und stetige Function des Ortes, die für unendlich entfernte Punkte so verschwindet, dass lV die wirksame Masse bezeichnet, wenn l der Radiusvector des unendlich entfernten Punktes ist, mag sie herkommen von Massen, die Räume oder die Flächen erfüllen, vorausgesetzt nur, dass die Massendichtigkeit selbst allenthalben endlich ist.

Setzt man in §. 1. in den Werthen von Ξ, H und Z, $\frac{x-\xi}{r} = \cos\alpha$, $\frac{y-\eta}{r} = \cos\beta$; $\frac{z-\zeta}{r} = \cos\gamma$ und wendet dann auf diese Formeln gerade so wie vorhin ein gewöhnliches räumliches Polarcoordinatensystem an, so erkennt man leicht, dass auch die ersten partiellen Derivirten der Potentialfunction nirgends unendlich werden, und dass der vorige Satz über die Potentialfunction V sich ohne weiteres auch übertragen lässt auf ihre ersten partiellen Derivirten, wenn die Massen Räume stetig und mit nirgends unendlich werdender Dichtheit erfüllen; indem aber jetzt die ersten Derivirten für unendlich entfernte Punkte so verschwinden, dass ihr Product in das Quadrat des Radiusvectors des unendlich entfernten Punktes endlich bleibt. Man erkennt ferner leicht, dass dieser Satz wenigstens auch dann noch für die ersten partiellen Derivirten von Massen gilt, die Flächen mit nirgends unendlich werdender Dichtheit erfüllen,

wenn der Punkt $x\,y\,z$ ausserhalb dieser Fläche liegt. Wie sich dieselben verhalten, wenn $x\,y\,z$ der Fläche unendlich nahe liegt, soll später untersucht werden.

Wir bilden nun noch den Ausdruck:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \varDelta V.$$

Nun ist

$$\frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + 3\frac{(\xi - x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} + 3\frac{(\eta - y)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} + 3\frac{(\zeta - z)^2}{r^5} = 0.$$

Da der zu bildende Ausdruck die rechter Hand stehende Summe, multiplicirt mit $\varrho\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$ als Integrationselement enthält, so muss auch er verschwinden, so lange die einzelnen Integrationselemente endliche Werthe enthalten, d. i. so lange $\frac{1}{r}$ allenthalben endlich bleibt oder so lange der Punkt $x\,y\,z$ in endlicher Entfernung von den gegebenen Massen gelegen ist. Wir erhalten also das bemerkenswerthe Resultat: Es ist

$$\varDelta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

so lange der Punkt $x\,y\,z$ sich nicht innerhalb oder unendlich nahe der die Potentialfunction V erzeugenden Masse befindet.

§. 3.

Ein allgemeiner Satz von Gauss und der Ausdruck $\varDelta V$.

Es soll der Werth des Integrales

$$\int \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma$$

bestimmt werden, das sich über die ganze gegebene geschlossene Oberfläche σ erstreckt und in welchem $\frac{\partial V}{\partial n}$ bedeutet das Aenderungsgesetz der Potentialfunction V, wenn man um das Normalendifferential dn der Fläche σ nach Aussen fortschreitet. Als einfachsten Fall nehmen wir zunächst an,

dass V erzeugt werde von einer punktförmigen Masse, die gelegen im Punkte $a\,b\,c$ die positive Masseneinheit besitzt.

Nehmen wir den Punkt $a\,b\,c$ zum Pol eines gewöhnlichen räumlichen Polarcoordinatensystemes, so ist

$$V = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}.$$

Bildet nun der Radiusvector des Flächenelementes $d\sigma$ mit der auf $d\sigma$ nach aussen errichteten Normalen den Winkel ϑ, so ist offenbar

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \cos\vartheta$$

und das vorgelegte Integral wird

$$\int \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma = -\int \frac{1}{r^2}\cos\vartheta\, d\sigma.$$

Nun bedeutet $\cos\vartheta\, d\sigma$ die Projection des Flächenelementes $d\sigma$ auf eine Kugelfläche, die mit dem Radius $= r$ vom Coordinatenanfang $a\,b\,c$ aus als Mittelpunkt beschrieben worden ist. Nennen wir also $d\omega$ den körperlichen Winkel, unter welchem vom Coordinatenanfang aus das Oberflächenelement $d\sigma$ gesehen wird, so haben wir auch

$$\cos\vartheta\, d\sigma = \pm\, r^2\, d\omega; \quad \frac{1}{r^2}\cos\vartheta\, d\sigma = \pm\, d\omega.$$

Im Allgemeinen trifft nun der vom Punkte $a\,b\,c$ aus gezogene Fahrstrahl die Oberfläche mehrmals, und da wir immer die Normale, welche nach aussen gerichtet ist, als positiv rechnen, so ist der Winkel zwischen Fahrstrahl und Normale für alle die Stellen, wo der Fahrstrahl in den von σ umschlossenen Raum eintritt, stumpf, für die Stellen, wo er austritt, spitz, der Cosinus dieses Winkels also im ersten Falle negativ, im zweiten positiv.

Für jede Eintrittsstelle ist demnach $\frac{1}{r^2}\cos\vartheta\, d\sigma = -\, d\omega$

„ „ Austrittsstelle „ „ $\frac{1}{r^2}\cos\vartheta\, d\sigma = +\, d\omega.$

Liegt nun der Punkt $a\,b\,c$ im Innern des von σ umschlossenen Raumes, so giebt es für den Fahrstrahl eine Austrittsstelle mehr als Eintrittsstellen, nach ausgeführter Ad-

dition bleibt demnach allein als Summe aller Projectionen der Flächenelemente der Ein- und Austrittsstellen 1. $d\omega$ übrig. Es ergiebt daher das vorgelegte Integral

$$\int \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma = -\int \frac{1}{r^2} \cos\vartheta\, d\sigma = -\int d\omega = -4\pi.$$

Liegt dagegen der Punkt abc ausserhalb des von σ umschlossenen Raumes, so sind eben′soviel Eintritts- als Austrittsstellen vorhanden und für diesen Fall muss sich ergeben

$$\int \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma = -\int \frac{1}{r^2} \cos\vartheta\, d\sigma = 0.$$

Liegt der Punkt abc auf der Fläche σ selbst und begrenzen sämmtliche Tangenten, die man durch den Punkt abc an die Fläche σ ziehen kann, den körperlichen Winkel Ω, so tritt für diesen Winkelraum dasselbe ein, als ob der Punkt abc im Innern der Oberfläche σ läge, während für den Ergänzungswinkel $4\pi - \Omega$ dasselbe erfolgt, als ob der Punkt abc ganz ausserhalb der Fläche σ gelegen sei; es entsteht demnach für diesen Fall

$$\int \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma = -\Omega.$$

Ist nicht bloss ein Massenpunkt abc vorhanden, sondern beliebig viele mit den Massen $m_1, m_2, m_3, \ldots$ so ist

$$V = \Sigma \frac{m}{r}.$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \Sigma \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{m}{r}\right) = \Sigma m \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \text{ und demnach auch}$$

$$\int \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma = \int \Sigma m \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma = \Sigma m \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma.$$

Es ist daher jetzt

$$\int \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma = -\Omega \Sigma m,$$

wo $\Omega = 4\pi$ für alle Massenpunkte im Innern der Fläche σ
$\Omega = 0$ „ „ „ ausserhalb „ „ σ
$\Omega = \Omega$ „ „ „ auf „ „ σ.

Erfüllen endlich die gegebenen Massen gewisse Räume stetig, (mögen die Räume nun Volumina oder Flächen oder Linien

sein) und ist die Gesammtmasse $= M$, wo M erklärt werden möge durch die Gleichung:

$$M = \int dm,$$

so ist jetzt

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = \int \left\{ \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma \right\} dm.$$

$$= - \int \Omega \, dm = - \Omega M.$$

Wir kommen also zu dem allgemeinen Resultate:

Es ist immer, wenn V bezeichnet die Potentialfunction, welche von der Gesammtmasse M erzeugt wird, wenn σ irgend eine geschlossene Oberfläche ist und $\frac{\partial V}{\partial n}$ bedeutet eine Differentiation von V nach der nach aussen auf σ errichteten Normale,

$$\text{I,} \qquad \int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = - \Omega M, \text{[1]}$$

wo $\Omega = 4\pi$, für alle die Theile von M, die innerhalb σ liegen.
$\Omega = 0$ „ „ „ „ „ „ „ ausserhalb σ liegen.
$\Omega = \Omega$ „ „ „ „ „ „ „ auf σ liegen.

Wir wenden jetzt diesen Gaussischen Satz an zur genauern Untersuchung des Ausdruckes ΔV, indem wir als Fläche σ die Oberfläche eines unendlich kleinen rechtwinkligen Parallelepipedes wählen, dessen drei aneinander stossende Kanten $dx\,dy\,dz$ sind. Ist ϱ die Dichtheit der innerhalb dieses unendlich kleinen Raumes vorhandenen Masse, so ist, nach dem eben gewonnenen Lehrsatz:

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = - 4\pi\varrho \, dx \, dy \, dz.$$

Andererseits ist für die Begrenzungsflächen des Parallelepipedes parallel der YZ Ebene $\frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = \pm \frac{\partial V}{\partial x} dy \, dz$

„ „ ZX „ $\frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = \pm \frac{\partial V}{\partial y} dz \, dx$

---

1) Gauss gab diesen Lehrsatz zuerst in: Theoria Attractionis corporum sphaeroid. ellipt. Art. 6. Crelle Journal 1811 und nahm ihn später wieder auf in: Allgemeine Lehrsätze über die im verkehrten Verhältniss des Quadrats cet. Resultate des magnet. Vereins 1839. Leipzig 1840.

parallel der XY Ebene $\frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma = \pm \frac{\partial V}{\partial z}\, dx\, dy.$

Demnach ist auch

$$\int \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma = \left[\frac{\partial V}{\partial x}\, dy\, dz\right]_{x+dx} + \left[\frac{\partial V}{-\partial x}\, dy\, dz\right]_x$$
$$+ \left[\frac{\partial V}{\partial y}\, dz\, dx\right]_{y+dy} + \left[\frac{\partial V}{-\partial y}\, dz\, dx\right]_y$$
$$+ \left[\frac{\partial V}{\partial z}\, dx\, dy\right]_{z+dz} + \left[\frac{\partial V}{-\partial z}\, dx\, dy\right]_z,$$

wo die angehängten Indices auf der rechten Seite andeuten sollen, auf welche der parallelen Gegenflächen sich der in Klammern eingeschlossene Ausdruck bezieht.

Der zuletzt erlangte Ausdruck ergiebt weiter:

$$\int \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_x}{dx}\, dx\, dy\, dz$$
$$+ \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{y+dy} - \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_y}{dy}\, dx\, dy\, dz$$
$$+ \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z+dz} - \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_z}{dz}\, dx\, dy\, dz.$$
$$= \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz.$$

Durch Vergleichung der beiden für $\int \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma$ erhaltenen Werthe entsteht nun

$$\text{II,} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\varrho = \Delta V.$$

Diese wichtige partielle Differentialgleichung wurde von Laplace entdeckt (Mécanique céleste), wesswegen dieselbe auch die Laplace'sche Gleichung heisst. Laplace glaubte noch, dass sie immer die Form $\Delta V = 0$ habe, dass ihre allgemeinere Form die vorstehend unter II, genannte sei, die für $\varrho = 0$ die speciell Laplace'sche mit umfasst, erkannte zuerst Poisson.[1]) Die Gleichung II, ist mehrfach direkt

---

1) Laplace Mécanique céléste Tome II. Poisson: Bulletin de la Société Philomatique, t. III. p. 368.

und streng abgeleitet worden, z. B. von Gauss,[1]) Clausius[2]) cet. Die speciellen Voraussetzungen, die dabei über die Krümmung der Oberfläche des mit Masse angefüllten Raumes gemacht werden mussten, treten hier nur in der einfacheren und übersichtlicheren Forderung auf, dass man, wenn die rechte Seite den Factor 4π enthalten soll, um den betreffenden Punkt $x\,y\,z$, auf welchen sich die Gleichung bezieht, ein unendlich kleines Parallelepiped beschreiben könne, das nirgends aus der Oberfläche σ heraustrete.

Die hier gegebene Ableitung der Fundamentalgleichuug II, gab Riemann in seinen Vorlesungen über das Potential.

Es hat nach der angegebenen Ableitung der Gleichung II, auch keine Schwierigkeit, genauer zu bestimmen, wie diese Gleichung II, lautet, wenn der Punkt $x\,y\,z$ auf der Grenzfläche der gegebenen Massen selbst liegt. Hier mag nur die Bemerkung genügen, dass, wenn die Dichtigkeit ϱ endlich bleibt, auch ΔV einen immer endlichen Werth hat.

Wegen der Wichtigkeit der Gleichung II, für die ganze fernere Betrachtung möge hier gleich noch eine allgemeine Transformation derselben für ein beliebiges räumliches orthogonales Coordinatensystem folgen.

Irgend ein Punkt xyz des Raumes soll dadurch seiner Lage nach bestimmt werden, dass er als der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der drei Flächen

$$\varrho_1 = f_1(x, y, z); \; \varrho_2 = f_2(x, y, z); \; \varrho_3 = f_3(x, y, z)$$

aufgefasst werde und diese drei Flächen mögen so beschaffen sein, dass, wenn $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ sich ändern, der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der drei genannten Flächen jede beliebige Lage im Raume erhalten kann. Die drei Grössen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ können alsdann als Coordinaten des Durchschnittspunktes der drei Flächen aufgefasst werden. Wir nehmen noch an, dass das neue Coordinatensystem ein orthogonales ist, d. h. dass die Flächen sich gegenseitig in ihren Krümmungslinien durchschneiden, oder, dass die Durchschnittslinie irgend zweier der Flächen auf der dritten

---

1) Gauss Allgem. Lehrsätze cet. §. 9. 10. 11.

2) Clausius Liouville Journal Ser. II T. III 1858.

Fläche senkrecht steht. Die obigen Gleichungen ergeben, wenn sie nach x, y, z aufgelöst gedacht werden:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \varrho_1} d\varrho_1 + \frac{\partial x}{\partial \varrho_2} d\varrho_2 + \frac{\partial x}{\partial \varrho_3} d\varrho_3$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \varrho_1} d\varrho_1 + \frac{\partial y}{\partial \varrho_2} d\varrho_2 + \frac{\partial y}{\partial \varrho_3} d\varrho_3$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \varrho_1} d\varrho_1 + \frac{\partial z}{\partial \varrho_2} d\varrho_2 + \frac{\partial z}{\partial \varrho_3} d\varrho_3.$$

Diese Gleichungen quadrirt und addirt, geben

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = N_1 d\varrho_1^2 + N_2 d\varrho_2^2 + N_3 d\varrho_3^2 + 2n_3 d\varrho_1 d\varrho_2 + 2n_1 d\varrho_2 d\varrho_3 + 2n_2 d\varrho_3 d\varrho_1,$$

wenn ds das Bogenelement bezeichnet und

$$N_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varrho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varrho_1}\right)^2$$

$$N_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varrho_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varrho_2}\right)^2$$

$$N_3 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varrho_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varrho_3}\right)^2$$

$$n_3 = \frac{\partial x}{\partial \varrho_1}\frac{\partial x}{\partial \varrho_2} + \frac{\partial y}{\partial \varrho_1}\frac{\partial y}{\partial \varrho_2} + \frac{\partial z}{\partial \varrho_1}\frac{\partial z}{\partial \varrho_2}$$

$$n_1 = \frac{\partial x}{\partial \varrho_2}\frac{\partial x}{\partial \varrho_3} + \frac{\partial y}{\partial \varrho_2}\frac{\partial y}{\partial \varrho_3} + \frac{\partial z}{\partial \varrho_2}\frac{\partial z}{\partial \varrho_3}$$

$$n_2 = \frac{\partial x}{\partial \varrho_3}\frac{\partial x}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial y}{\partial \varrho_3}\frac{\partial y}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial z}{\partial \varrho_3}\frac{\partial z}{\partial \varrho_1}.$$

Zugleich ist das Volumenelement

$$dx\,dy\,dz = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varrho_1} & \frac{\partial x}{\partial \varrho_2} & \frac{\partial x}{\partial \varrho_3} \\ \frac{\partial y}{\partial \varrho_1} & \frac{\partial y}{\partial \varrho_2} & \frac{\partial y}{\partial \varrho_3} \\ \frac{\partial z}{\partial \varrho_1} & \frac{\partial z}{\partial \varrho_2} & \frac{\partial z}{\partial \varrho_3} \end{vmatrix} d\varrho_1\, d\varrho_2\, d\varrho_3. \text{ [1]}$$

Quadrirt man diese Gleichung, so folgt:

$$dx^2\, dy^2\, dz^2 =$$

---

1) Vergl. Jacobi, Journal v. Crelle 12. p. 38. determin. function. §. 19.

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varrho_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varrho_1}\right)^2 & \frac{\partial x}{\partial \varrho_1}\frac{\partial x}{\partial \varrho_2}+\frac{\partial y}{\partial \varrho_1}\frac{\partial y}{\partial \varrho_2}+\frac{\partial z}{\partial \varrho_1}\frac{\partial z}{\partial \varrho_2} & \frac{\partial x}{\partial \varrho_3}\frac{\partial x}{\partial \varrho_1}+\frac{\partial y}{\partial \varrho_3}\frac{\partial y}{\partial \varrho_1}+\frac{\partial z}{\partial \varrho_3}\frac{\partial z}{\partial \varrho_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \varrho_1}\frac{\partial x}{\partial \varrho_2}+\frac{\partial y}{\partial \varrho_1}\frac{\partial y}{\partial \varrho_2}+\frac{\partial z}{\partial \varrho_1}\frac{\partial z}{\partial \varrho_2} & \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varrho_2}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varrho_2}\right)^2 & \frac{\partial x}{\partial \varrho_2}\frac{\partial x}{\partial \varrho_3}+\frac{\partial y}{\partial \varrho_2}\frac{\partial y}{\partial \varrho_3}+\frac{\partial z}{\partial \varrho_2}\frac{\partial z}{\partial \varrho_3} \\ \frac{\partial x}{\partial \varrho_3}\frac{\partial x}{\partial \varrho_1}+\frac{\partial y}{\partial \varrho_3}\frac{\partial y}{\partial \varrho_1}+\frac{\partial z}{\partial \varrho_3}\frac{\partial z}{\partial \varrho_1} & \frac{\partial x}{\partial \varrho_2}\frac{\partial x}{\partial \varrho_3}+\frac{\partial y}{\partial \varrho_2}\frac{\partial y}{\partial \varrho_3}+\frac{\partial z}{\partial \varrho_2}\frac{\partial z}{\partial \varrho_3} & \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_3}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varrho_3}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varrho_3}\right)^2 \end{vmatrix} \times d\varrho_1^2\, d\varrho_2^2\, d\varrho_3^2.$$

Hieraus entsteht durch Einführung der oben mit N_1, N_2, N_3, n_1, n_2, n_3 bezeichneten Werthe:

$$dx^2\, dy^2\, dz^2 = \begin{vmatrix} N_1 & n_3 & n_2 \\ n_3 & N_2 & n_1 \\ n_2 & n_1 & N_3 \end{vmatrix} d\varrho_1^2\, d\varrho_2^2\, d\varrho_3^2.$$

Die Cosinus der Winkel, welche die Normale auf der Fläche $\varrho_1 = f_1(x, y, z)$ mit den drei Coordinatenaxen bildet, sind nun, wenn

$$\Delta_1^2 = \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial z}\right)^2,$$

$$\frac{1}{\Delta_1}\frac{\partial \varrho_1}{\partial x},\quad \frac{1}{\Delta_1}\frac{\partial \varrho_1}{\partial y},\quad \frac{1}{\Delta_1}\frac{\partial \varrho_1}{\partial z}.$$

Analog gilt für die Fläche $\varrho_2 = f_2(x, y, z)$

$$\Delta_2^2 = \left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial z}\right)^2$$

$$\frac{1}{\Delta_2}\frac{\partial \varrho_2}{\partial x},\quad \frac{1}{\Delta_2}\frac{\partial \varrho_2}{\partial y},\quad \frac{1}{\Delta_2}\frac{\partial \varrho_2}{\partial z},$$

und in gleicher Weise für die Fläche $\varrho_3 = f_3(x, y, z)$

$$\Delta_3^2 = \left(\frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho_3}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho_3}{\partial z}\right)^2$$

$$\frac{1}{\Delta_3}\frac{\partial \varrho_3}{\partial x},\quad \frac{1}{\Delta_3}\frac{\partial \varrho_3}{\partial y},\quad \frac{1}{\Delta_3}\frac{\partial \varrho_3}{\partial z}.$$

Da sich nun die drei Flächen im Punkte $x\,y\,z$ senkrecht durchschneiden sollen, also ihre Normalen in jenem

Punkte senkrecht auf einander stehen, so hat man, da auch die Axen X, Y, Z senkrecht auf einander stehen, für diese letzteren Axen im Bezug auf das System der ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3:

$$\frac{1}{\varDelta_1^2}\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{\varDelta_2^2}\left(\frac{\partial\varrho_2}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{\varDelta_3^2}\left(\frac{\partial\varrho_3}{\partial x}\right)^2=1.$$

$$\frac{1}{\varDelta_1^2}\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{\varDelta_2^2}\left(\frac{\partial\varrho_2}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{\varDelta_3^2}\left(\frac{\partial\varrho_3}{\partial y}\right)^2=1.$$

$$\frac{1}{\varDelta_1^2}\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{\varDelta_2^2}\left(\frac{\partial\varrho_2}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{\varDelta_3^2}\left(\frac{\partial\varrho_3}{\partial z}\right)^2=1.$$

$$\frac{1}{\varDelta_1^2}\frac{\partial\varrho_1}{\partial x}\frac{\partial\varrho_1}{\partial y}+\frac{1}{\varDelta_2^2}\frac{\partial\varrho_2}{\partial x}\frac{\partial\varrho_2}{\partial y}+\frac{1}{\varDelta_3^2}\frac{\partial\varrho_3}{\partial x}\frac{\partial\varrho_3}{\partial y}=0$$

$$\frac{1}{\varDelta_1^2}\frac{\partial\varrho_1}{\partial y}\frac{\partial\varrho_1}{\partial z}+\frac{1}{\varDelta_2^2}\frac{\partial\varrho_2}{\partial y}\frac{\partial\varrho_2}{\partial z}+\frac{1}{\varDelta_3^2}\frac{\partial\varrho_3}{\partial y}\frac{\partial\varrho_3}{\partial z}=0$$

$$\frac{1}{\varDelta_1^2}\frac{\partial\varrho_1}{\partial z}\frac{\partial\varrho_1}{\partial x}+\frac{1}{\varDelta_2^2}\frac{\partial\varrho_2}{\partial z}\frac{\partial\varrho_2}{\partial x}+\frac{1}{\varDelta_3^2}\frac{\partial\varrho_3}{\partial z}\frac{\partial\varrho_3}{\partial x}=0.$$

Andererseits hat man durch direkte Differentiation der Gleichungen $\varrho_1=f_1(x,y,z)$; $\varrho_2=f_2(x,y,z)$; $\varrho_3=f_3(x,y,z)$; nach x, y und z:

$$\frac{\partial\varrho_1}{\varDelta_1}=\frac{1}{\varDelta_1}\frac{\partial\varrho_1}{\partial x}dx+\frac{1}{\varDelta_1}\frac{\partial\varrho_1}{\partial y}dy+\frac{1}{\varDelta_1}\frac{\partial\varrho_1}{\partial z}dz$$

$$\frac{\partial\varrho_2}{\varDelta_2}=\frac{1}{\varDelta_2}\frac{\partial\varrho_2}{\partial x}dx+\frac{1}{\varDelta_2}\frac{\partial\varrho_2}{\partial y}dy+\frac{1}{\varDelta_2}\frac{\partial\varrho_2}{\partial z}dz$$

$$\frac{\partial\varrho_3}{\varDelta_3}=\frac{1}{\varDelta_3}\frac{\partial\varrho_3}{\partial x}dx+\frac{1}{\varDelta_3}\frac{\partial\varrho_3}{\partial y}dy+\frac{1}{\varDelta_3}\frac{\partial\varrho_3}{\partial z}dz.$$

Quadrirt und addirt man diese Gleichungen, indem man auf die vorigen, die Orthogonalität bedingenden Gleichungen Rücksicht nimmt, so entsteht:

$$\left(\frac{d\varrho_1}{\varDelta_1}\right)^2+\left(\frac{d\varrho_2}{\varDelta_2}\right)^2+\left(\frac{d\varrho_3}{\varDelta_3}\right)^2=dx^2+dy^2+dz^2=ds^2.$$

Die Vergleichung dieses Ausdruckes mit dem vorigen für ds^2 gefundenen, ergiebt:

$$N_1=\frac{1}{\varDelta_1^2};\ N_2=\frac{1}{\varDelta_2^2};\ N_3=\frac{1}{\varDelta_3^2};\ n_3=n_1=n_2=0.$$

Ist also

$$N_1=\left(\frac{\partial x}{\partial\varrho_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varrho_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varrho_1}\right)^2=\frac{1}{\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial z}\right)^2}$$

$$N_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varrho_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varrho_2}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial z}\right)^2}$$

$$N_3 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varrho_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varrho_3}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho_3}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho_3}{\partial z}\right)^2},$$

so ist für das entsprechende orthogonale Coordinatensystem

$$ds^2 = N_1 d\varrho_1^2 + N_2 d\varrho_2^2 + N_3 d\varrho_3^2$$

$$dx\,dy\,dz = \sqrt{N_1 N_2 N_3}\, d\varrho_1\, d\varrho_2\, d\varrho_3$$

Hieraus folgt, dass das Volumenelement die drei senkrecht auf einander stehenden Kantenelemente

$$\sqrt{N_1}\, d\varrho_1,\ \sqrt{N_2}\, d\varrho_2,\ \sqrt{N_3}\, d\varrho_3$$

besitze, die zugleich der Reihe nach die Normalenelemente der drei Seitenelemente

$$\sqrt{N_2 N_3}\, d\varrho_2\, d\varrho_3,\ \sqrt{N_3 N_1}\, d\varrho_3\, d\varrho_1,\ \sqrt{N_1 N_2}\, d\varrho_1\, d\varrho_2$$

darstellen.

Wenden wir nun unsere Hülfsgleichung I, an auf die Begrenzung des Volumenelementes $\sqrt{N_1 N_2 N_3}\, d\varrho_1\, d\varrho_2 d\varrho_3$, so folgt, indem wir für das Differential der Normale ∂n der Reihe nach zu setzen haben $\sqrt{N_1}\,\partial\varrho_1$; $\sqrt{N_2}\partial\varrho_2$, $\sqrt{N_3}\partial\varrho_3$,

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = \left[\frac{\partial V}{\sqrt{N_1}\,\partial \varrho_1}\sqrt{N_2 N_3}\, d\varrho_2 d\varrho_3\right]_{\varrho_1 + d\varrho_1} - \left[\frac{\partial V}{\sqrt{N_1}\partial \varrho_1}\sqrt{N_2 N_3} d\varrho_2 d\varrho_3\right]_{\varrho_1}$$

$$+ \left[\frac{\partial V}{\sqrt{N_2}\,\partial \varrho_2}\sqrt{N_3 N_1}\, d\varrho_3 d\varrho_1\right]_{\varrho_2 + d\varrho_2} - \left[\frac{\partial V}{\sqrt{N_2}\partial \varrho_2}\sqrt{N_3 N_1} d\varrho_3 d\varrho_1\right]_{\varrho_2}$$

$$+ \left[\frac{\partial V}{\sqrt{N_3}\,\partial \varrho_3}\sqrt{N_1 N_2}\, d\varrho_1 d\varrho_2\right]_{\varrho_3 + d\varrho_3} - \left[\frac{\partial V}{\sqrt{N_3}\partial \varrho_3}\sqrt{N_1 N_2} d\varrho_1 d\varrho_2\right]_{\varrho_3}$$

$$= \left\{\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left[\frac{\partial V}{\partial \varrho_1}\sqrt{\frac{N_2 N_3}{N_1}}\right] + \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left[\frac{\partial V}{\partial \varrho_2}\sqrt{\frac{N_3 N_1}{N_2}}\right] + \frac{\partial}{\partial \varrho_3}\left[\frac{\partial V}{\partial \varrho_3}\sqrt{\frac{N_1 N_2}{N_3}}\right]\right\} d\varrho_1 d\varrho_2 d\varrho_3$$

Andererseits ist jetzt

$$\int \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma = -\, 4\pi \sqrt{N_1 N_2 N_3}\, \varrho\, d\varrho_1\, d\varrho_2 d\varrho_3.$$

Demnach entsteht die auf irgend ein anderes orthogonales räumliches Coordinatensystem transformirte Gleichung aus II, wenn noch $\sqrt{N_1 N_2 N_3} = P$

$$\text{III,}\quad \frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(\frac{\partial V}{\partial\varrho_1}\frac{P}{N_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left(\frac{\partial V}{\partial\varrho_2}\frac{P}{N_2}\right)+\frac{\partial}{\partial\varrho_3}\left(\frac{\partial V}{\partial\varrho_3}\frac{P}{N_3}\right)=-4\pi P\varrho=P\Delta V.$$

Hieraus folgt z. B. für das gewöhnliche räumliche Polarcoordinatensystem, indem jetzt

$$x = r\cos\theta;\ y = r\sin\theta\ \cos\varphi;\ z = r\sin\theta\ \sin\varphi$$

$$N_1 = 1;\ N_2 = r^2;\ N_3 = r^2\sin^2\theta;\ \sqrt{N_1 N_2 N_3} = r^2\sin\theta.$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial\theta}\sin\theta\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}=-4\pi r^2\varrho.$$

Wir benützen diese letztere Gleichung noch, um die Potentialfunction einer Hohlkugel zu bestimmen, in welcher die Massendichtheit ϱ nur eine Function des Abstandes des zugehörigen Raumelementes vom Kugelmittelpunkt ist. Sei p der Radius der äussern, q der der innern begrenzenden Kugelfläche. In diesem Falle ist offenbar V unabhängig von θ und φ, und demnach geht die vorige Gleichung über in die einfachere

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = -\ 4\pi r^2\varrho.$$

Nun ist $\varrho = 0$ für alle Punkte, welche ausserhalb der mit Masse angefüllten Kugelschale liegen, für solche Punkte gilt demnach

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = 0$$

folglich

$$r^2\frac{dV}{dr} = \alpha,$$

wenn α eine Integrationsconstante bezeichnet. Es folgt weiter

$$\frac{dV}{dr} = \frac{\alpha}{r^2}$$

$$V = -\ \frac{\alpha}{r} + \beta,$$

wo β die zweite Integrationsconstante bezeichnet.

Um die Integrationsconstanten α und β zu bestimmen, unterscheiden wir die beiden Fälle, ob der Punkt, auf den sich V bezieht, im innern Hohlraume der Hohlkugel liegt, oder ob derselbe dem äussern Raume angehöre.

Im ersteren Falle wissen wir, dass V für den Mittelpunkt der Hohlkugel, also für $r = 0$, nicht unendlich werden kann, es muss demnach $\alpha = 0$ sein, dann folgt

$$V = \beta = \text{Const.}$$

im ganzen innern Hohlraume der Hohlkugel. Es ergiebt sich daher auch

$$\frac{dV}{dr} = 0$$

d. h. im ganzen inneren Hohlraum der Hohlkugel wird von der Hohlkugel gar keine Kraftwirkung ausgeübt.

Um den Werth von β selbst zu bestimmen, kann man die Potentialfunction für den Mittelpunkt aufsuchen, man erhält

$$\beta = 4\pi \int_q^p \varrho r dr;$$

wäre die Halbkugel homogen, so entstünde

$$\beta = 2\pi\varrho\,(p^2 - q^2).$$

Gehört der Punkt, auf den sich V bezieht, dem äusseren Raume an, so kann man zur Bestimmung der Constanten den Umstand benützen, dass sich für unendlich entfernte Punkte V gerade so der Null nähern muss, als ob die ganze elektrische Masse der Hohlkugel $= M$ in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre (vergl. §. 2.).

Für unendlich entfernte Punkte wird also

$$\lim_{r=\infty} - \frac{\alpha}{r} + \beta = \lim_{r=\infty} \frac{M}{r}.$$

Hieraus folgt

$$\beta = 0; -\alpha = + M = 4\pi \int_q^p \varrho r^2 dr$$

und

$$V = \frac{M}{r},$$

$$\frac{dV}{dr} = - \frac{M}{r^2}.$$

Eine Hohlkugel, deren Massendichtheit nur eine Function des Radius ist, wirkt also auf einen ausserhalb der Hohl-

kugel gelegenen Punkt gerade so, als ob die Gesammtmasse der Hohlkugel in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Wäre die Hohlkugel homogen, so entstünde:

$$M = \tfrac{4}{3}\pi\varrho\,(p^3 - q^3)$$

$$V = \tfrac{4}{3}\,\frac{\pi\varrho}{r}\,(p^3 - q^3)$$

$$\frac{dV}{dr} = -\tfrac{4}{3}\,\frac{\pi\varrho}{r^2}\,(p^3 - q^3).$$

Für eine homogene Vollkugel ist $q = 0$, also für dieselbe für irgend einen im Abstande r vom Mittelpunkt gelegenen Punkt, wenn $r > p$

$$V = \tfrac{4}{3}\,\frac{\pi\varrho}{r}\,p^3;\ \frac{dV}{dr} = -\tfrac{4}{3}\,\frac{\pi\varrho}{r^2}\,p^3.$$

Um auch die Potentialfunction für einen in der Masse der homogenen Vollkugel selbst gelegenen Punkt zu bestimmen, gehen wir zurück auf die Gleichung

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\,\frac{dV}{dr}\right) = -4\pi r^2\varrho.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$r^2\,\frac{dV}{dr} = -\tfrac{4}{3}\pi r^3\varrho + a,$$

wenn a die Integrationsconstante bezeichnet; oder

$$\frac{dV}{dr} = -\tfrac{4}{3}\pi r\varrho + \frac{a}{r^2}\,.$$

Um die Integrationsconstante a zu bestimmen, benützen wir den Umstand, dass $\frac{dV}{dr}$ eine stetige Function in Bezug auf r sein muss und dass die letzte Gleichung gemäss der zu Grunde gelegten Differentialgleichung noch gilt, wenn der Punkt, auf welchen sich V oder $\frac{dV}{dr}$ bezieht, der Kugeloberfläche auf der inneren Seite unendlich nahe rückt; alsdann kann sich auch der eben für $\frac{dV}{dr}$ gefundene Werth nur unendlich wenig von dem obigen für ausserhalb der Kugel gelegene Punkte gültigen Werthe $\frac{dV}{dr} = -\tfrac{4}{3}\,\frac{\pi\varrho}{r^2}\,p^3$ unterscheiden, wenn der fragliche Punkt, auf den sich $\frac{dV}{dr}$

bezieht, von aussen der Kugel unendlich nahe rückt. Setzen wir also in diesem Falle $r = p + \Delta p$, im ersteren $r = p - \Delta p$, so muss die Differenz beider so für $\frac{dV}{dr}$ entstehender Werthe nuendlich klein $= \varepsilon$ sein, wenn Δp unendlich klein wird. Es ist also

$$-\tfrac{4}{3}\pi\varrho(p - \Delta p) + \frac{a}{(p-\Delta p)^2} + \tfrac{4}{3}\pi\varrho\frac{p^3}{(p+\Delta p)^2} = \varepsilon.$$

Lassen wir in dieser Gleichung Δp also auch ε unendlich klein werden, so folgt

$$a = 0.$$

Für einen im Innern der homogenen Vollkugel gelegenen Punkt ist also

$$\frac{dV}{dr} = -\tfrac{4}{3}\pi\varrho r.$$

Hieraus folgt weiter durch Integration

$$V = -\tfrac{2}{3}\pi\varrho r^2 + b,$$

wenn b die Integrationsconstante bezeichnet.

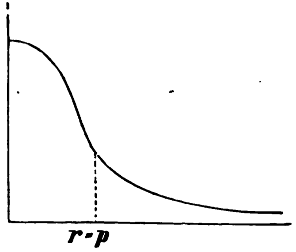


Fig 1a.

Wenden wir, um b zu bestimmen, dieselbe Schlussfolgerung, wie vorhin bei der Bestimmung von a an, so entsteht

$$-\tfrac{2}{3}\pi(p - \Delta p)^2\varrho + b - \tfrac{4}{3}\pi\varrho(p + \Delta p)^2 = \varepsilon,$$

also
$$b = 2\pi\varrho p^2.$$

Demnach gilt für einen im Innern der homogenen Vollkugel gelegenen Punkt im Abstand r vom Kugelcentrum

$$V = -\tfrac{2}{3}\pi\varrho r^2 + 2\pi\varrho p^2.$$

Denken wir uns V als Ordinate einer Curve, und r als die zugehörige Abscisse, so ist deren Gleichung

$$V = 4\pi\varrho\int_0^p \frac{a}{r}\,da = \Big[-\tfrac{2}{3}\pi\varrho r^2 + 2\pi\varrho p^2\Big]_{0 \leqq r \leqq p} + \Big[\tfrac{4}{3}\pi\varrho p^3\frac{1}{r}\Big]_{p \leqq r \leqq \infty}.$$

Die Curve stellt also (vergl. Fig. 1a), so lange $r \leqq p$ ist, eine Parabel dar, deren Scheitel in der Ordinatenaxe gelegen ist, so lange $r \geqq p$ ist, eine Hyperbel, die die Abscissen-

axe zur Asymptote hat. An der Stelle $r = p$ gehen beide Curven stetig in einander über.

Legen wir noch durch den Mittelpunkt der Kugel ein rechtwinkliges räumliches Coordinatensystem der x, y, z und bilden im Bezug auf dasselbe die zweiten partiellen Differentialquotienten von V, so ist

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{x}{r};$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}, \text{ folglich}$$

für einen innerhalb der Kugel gelegenen Punkt

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\tfrac{4}{3}\pi\varrho,$$

für einen ausserhalb der Kugel gelegenen Punkt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\tfrac{4}{3}\pi\varrho\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = -\tfrac{4}{3}\pi\varrho\frac{p^3}{r^3}\left(1 - 3\frac{x^2}{r^2}\right).$$

Vertauscht man in den eben für $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ gefundenen Werthen x mit y oder mit z, so erhält man die Werthe für

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \text{ und } \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Lässt man in den für $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ erhaltenen Werthen $r = p$ werden, so ergiebt der erstere

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{r=p} = -\tfrac{4}{3}\pi\varrho,$$

der letztere

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{r=p} = -\tfrac{4}{3}\pi\varrho\left(1 - 3\frac{x^2}{p^2}\right).$$

Beide Werthe geben also nicht dasselbe oder die zweiten partiellen Derivirten von V ändern sich beim Durchgang durch die Kugelfläche unstetig.

Ganz ähnliche Resultate erhält man auch für die Derivirten $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}$, und es kann aus diesem Umstand in anderer Weise erklärt werden, warum die Gleichung

$$\Delta V = -4\pi\varrho$$

in unmittelbarer Nähe der Grenzfläche nicht mehr anwendbar ist.

§. 4.

Der Lehrsatz von G. Green.

Es seien U und V zwei Functionen, die innerhalb eines gegebenen Raumes zugleich mit ihren ersten Derivirten allenthalben endlich und stetig bleiben. Wir bilden dann das Integral

$$I = \int\int\int \left\{ \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} \right\} dx\,dy\,dz$$

erstreckt über den ganzen gegebenen Raum.

Es kann zunächst die Form von I umgewandelt werden. Da nämlich U und V Functionen von x, y und z sind, also ebenfalls auch als Functionen des Ortes betrachtet werden können, so können wir uns diejenigen Werthe von U und von V vereinigt denken, die unverändert bleiben, wenn man in ihnen auch den Variablen x, y und z andere und andere Werthe beilegt, oder mit anderen Worten, wir gruppiren die Werthe von U und V so zusammen, dass sie immer Gleichungen von den Formen genügen:

$$U = \text{Const.} \qquad\qquad V = \text{Const.}$$

Jedes solche System von Werthen bedeutet, geometrisch genommen, eine Fläche.

Wir legen nun durch das Raumelement $dx dy dz$ sowohl die dem U als auch die dem V entsprechende Fläche und es mögen die im Raumelement auf diesen Flächen errichteten Normalen u und v mit einander den Winkel δ einschliessen Alsdann ist

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}\cos\delta.$$

Bedeuten nun u und v die Längen der Normalen, gerechnet vom Coordinatenanfang bis zur Tangentialebene an die Fläche $U = \text{Const.}$ oder $V = \text{Const.}$ im Punkte $x\,y\,z$, so ist

$$u = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}x + \frac{\partial U}{\partial y}y + \frac{\partial U}{\partial z}z}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}};$$

$$v = \frac{\frac{\partial V}{\partial x} x + \frac{\partial V}{\partial y} y + \frac{\partial V}{\partial z} z}{\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}}.$$

Hieraus folgt:

$$\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{x}{u} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{y}{u} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{z}{u},$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{x}{v} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{y}{v} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{z}{v}.$$

Schreiben wir statt der Verhältnisse $\frac{x}{u}, \frac{y}{u}, \frac{z}{u}$ die damit gleichwerthigen $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$ und ebenso statt $\frac{x}{v}, \frac{y}{v}, \frac{z}{v}$; $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$, so dass also in gleicher Weise ∂x, ∂y und ∂z die Projectionen von ∂u oder bei der andern Fläche von ∂v auf die Coordinatenaxen darstellen, wie diess im Bezug auf x, y und z für u oder v der Fall ist, so können wir setzen

$$\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial U}{\partial u},$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial v},$$

wo nun $\frac{\partial U}{\partial u}$ und $\frac{\partial V}{\partial v}$ das Aenderungsgesetz von U und V darstellen, wenn man von den Flächen $U =$ Const. und $V =$ Const. auf den Normalen dieser Flächen fortschreitet zu denen, bei welchen die Constanten einen nur unendlich wenig von den früheren Constanten unterschiedenen Werth haben.

Setzt man die erlangten Werthe ein, so erhält man nun

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial v}\cos\delta \text{ und}$$

$$I = \int\int\int \frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial v}\cos\delta \, dx\, dy\, dz.$$

Gehen wir ferner zurück auf die ursprüngliche Form von I, und wenden, wie es nach den über U und V und deren ersten Derivirten gemachten Voraussetzungen erlaubt ist, auf jeden einzelnen Theil partielle Integration an, so entsteht z. B. aus

$$\int\int\int \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} dx\, dy\, dz = \int\int \left\{ \left[U \frac{\partial V}{\partial x} \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \left[U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right] dx \right\} dy\, dz,$$

wobei die angehängten Zeichen x_0 und x_1 in leicht verständlicher Weise die im Bezug auf x geltenden Integrationsgrenzen andeuten mögen.

Die Richtung der x, nach welcher integrirt worden ist, wird nun im Allgemeinen die Oberfläche σ des Raumes, über welchen sich die Integration zu erstrecken hat, mehrfach schneiden; wir errichten in allen den Durchschnittspunkten Normalen, deren Richtung nach aussen wir als die positive auffassen, dann bildet an jeder Stelle, wo die Richtung parallel der X Achse, nach welcher integrirt worden ist, in die Fläche σ eintritt, mit der daselbst errichteten Normalen stumpfe, wo sie austritt spitze Winkel. Bezeichnen wir mit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots.$ die Winkel an den Eintritts- mit $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots.,$ die Winkel an den Austrittsstellen, so ist für die einzelnen Austrittsstellen

$$d\sigma \cos\beta_0 = dy\,dz;\ d\sigma \cos\beta_1 = dy\,dz;\ d\sigma \cos\beta_2 = dy\,dz, \ldots.,$$

dagegen für die einzelnen Eintrittsstellen:

$$d\sigma \cos\alpha_0 = -dy\,dz;\ d\sigma \cos\alpha_1 = -dy\,dz;\ d\sigma \cos\alpha_2 = -dy\,dz;\ldots.$$

Es ist aber auch, wenn ∂n das Differential der auf σ errichteten Normale bezeichnet, für jede Austrittsstelle

$$d\sigma \frac{\partial x}{\partial n} = d\sigma \cos\beta = dy\ dz,$$

für jede Eintrittsstelle

$$d\sigma \frac{\partial x}{\partial n} = d\sigma \cos\alpha = -dy\ dz.$$

Diess sind aber gerade die Werthe, welche in den ersten durch partielle Integration erhaltenen Ausdruck substituirt werden müssen. Wir erhalten daher

$$\iiint \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \int U \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}\,d\sigma - \iiint U \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dx\,dy\,dz,$$

wo sich nun das erste Integral der rechten Seite über die ganze Oberfläche des gegebenen Raumes zu erstrecken hat.

Durch analoge Wiederholung des eben angewandten Integrationsverfahrens auf die beiden anderen Theile des Integrales I ergiebt sich nun im Ganzen:

$$I = \iiint \frac{\partial U}{\partial u}\,\frac{\partial V}{\partial v} \cos\delta\ dx\ dy\ dz$$

$$= \int U \left[\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} \right] d\sigma$$

$$- \int\int\int U \left[\frac{\partial^2 V}{d x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] dx\, dy\, dz.$$

Oder, wenn wir wie früher die Differentiation nach der Normale

$$\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial n}$$

setzen und

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \Delta V$$

das Volumenelement $dx\, dy\, dz = dk$, so entsteht

$$\text{I,} \qquad \int \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial v} \cos\delta\, dk = \int U \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma - \int U \Delta V dk.$$

Vertauscht man in dieser Gleichung U und V mit einander, und zieht die so entstehende Gleichung von der Gleichung I, ab, so wird

$$\text{II,} \qquad \int (V\Delta U - U\Delta V)\, dk = \int \left(V \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial V}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Sind die über U und V gemachten Voraussetzungen nicht alle erfüllt, sondern ist etwa $U = \frac{1}{r}$, wo das Centrum der r im Innern des Raumes liegt, über welchen integrirt werden soll, so gilt die Gleichung II, wenigstens noch für den Raum, der nach aussen begrenzt ist durch die frühere Oberfläche σ, und nach innen durch eine Kugelfläche σ_1, die um das Centrum der r als Mittelpunkt beschrieben worden ist.

Es entsteht also aus II

$$\int \left(V\Delta \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \Delta V \right) dk + \int \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) d\sigma$$
$$+ \int \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n_1} - V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} \right) d\sigma_1 = 0,$$

wenn das letzte Integral der linken Seite sich auf die Oberfläche der Hülfskugel bezieht.

Wir sehen jetzt zu, was aus dieser Gleichung wird, wenn wir den Radius der Hülfskugel unendlich abnehmen lassen.

In diesem Falle verschwindet aber nicht allein

$$\int \left(V \varDelta \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \varDelta V \right) dk\,,$$

sondern auch $\int \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n_1} d\sigma_1$, wie man leicht erkennt, wenn man gewöhnliche räumliche Polarcoordinaten einführt, deren Anfang im Centrum der Hülfskugel liegt. Dagegen wird für eben diese Coordinaten

$$\int V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} d\sigma_1 = \int V \frac{\partial \frac{1}{r}}{-\partial r} d\sigma_1 = \int V \frac{1}{r^2} r^2 d\omega\,,$$

wenn $d\omega$ bedeutet den körperlichen Winkel, unter welchem das Element der Kugeloberfläche $d\sigma_1$ vom Mittelpunkte aus gesehen wird.

Bezeichnet nun V_1 den Werth von V im Mittelpunkt der Hülfskugel, so ist für ein unendlich abnehmendes r

$$\int V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} d\sigma_1 = 4\pi V_1\,.$$

Das zweite Integral der linken Seite der obigen Gleichung wird natürlich durch das unendlich klein werden der Hülfskugel nicht alterirt.

Nach diesen Resultaten ist es erlaubt, die Integrationen, welche in der obigen Gleichung vorkommen, ohne weiteres über den ganzen von σ umschlossenen Raum und nur über die Oberfläche σ zu erstrecken, wenn man noch das Ergänzungsglied $-4\pi V_1$ zufügt. Hierbei erleidet noch, wegen $\varDelta \frac{1}{r} = 0$, das erste Integral linker Hand die Vereinfachung, dass es in

$$-\int \frac{1}{r} \varDelta V dk$$

übergeht.

Wir erhalten demnach die Relation

$$\text{III,} \qquad 4\pi V_1 = -\int \frac{\varDelta V}{r} dk + \int \left(\frac{\frac{\partial V}{\partial n}}{r} - V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) d\sigma\,,$$

wenn V_1 bezeichnet den Werth von V in dem im Innern des von der Fläche σ umschlossenen Raumes gelegenen Cen-

trum der r und die Integrationen sich erstrecken über diesen ganzen Raum und dessen Oberfläche σ.

Vermöge der Symmetrie der Gleichung II, im Bezug auf U und V ist es nicht schwer zu erkennen, was aus der Gleichung II, wird, wenn U und V ihre Rollen vertauschen.

Es ist ferner nicht schwer zu erkennen, dass, wenn U eine Function ist, die im Punkte $r = 0$ unendlich wird wie $\frac{1}{r}$, während sie sonst zugleich mit ihren ersten Devirirten in dem ganzen Raume, über welchen sich die Integrationen erstrecken, allenthalben endlich und stetig ist, anstatt der Gleichung III, erscheint

$$\text{IV,} \qquad 4\pi V_1 = -\int U \Delta V dk + \int \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Wird ferner U (oder V) unendlich längs einer Linie, oder auf einer Fläche, oder in einem Raume, so gilt die Gleichung II, noch für den Raum, den man erhält, wenn man durch zweckmässig gelegte Flächen die Punkte, in denen U (oder V) unendlich wird, aus dem gegebenen Raume ausschaltet. Dabei haben sich natürlich die Flächenintegrale der Gleichung II, mit über die eben angenommenen Hülfsflächen zu erstrecken. Ob man diese letzteren Integrationen in ähnlicher Weise, wie an dem besprochenen Falle durchgeführt wurde, vermeiden kann, kann nur eine besondere Untersuchung der speciellen Fälle lehren.[1])

§. 5.

Anwendung des Green'schen Satzes zur Bestimmung von V mittels U.

Die Gleichung IV, des vorigen Paragraphen liefert ein Mittel, die Function V für alle Punkte innerhalb oder ausserhalb einer geschlossenen Fläche σ zu bestimmen, wenn V nur herkommt von Massen, die mit endlicher Dichtheit allein über die Fläche σ verbreitet sind, und wenn V selbst für alle Punkte von σ bekannt ist; alsdann ist nämlich $\Delta V = 0$

1) Die Resultate dieses Paragraphen gab George Green und machte sie bereits 1828 bekannt, später erschienen sie im 39., 44. u. 47. Bande von Crelle's Journal als: An Essay on the application of mathematical analysis to the theories of Electricity and Magnetism.

für alle Punkte innerhalb und ausserhalb der Fläche σ und die genannte Gleichung ergiebt zunächst für Punkte innerhalb der Fläche σ

$$4\pi V_1 = \int \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Da aber die geschlossene Fläche σ ebensogut auch betrachtet werden kann als Grenzfläche des ganzen äussern Raumes, eine Betrachtung, die nur für die Richtung der Normale von Einfluss ist, insofern jetzt die nach dem innern von σ umschlossenen Raum gerichtete Normale als positiv zu rechnen ist, so giebt die vorige Gleichung zugleich die Bestimmung von V für Punkte, welche ausserhalb der geschlossenen Fläche σ liegen.

Bestimmt man nun ausserdem die Function U noch so, dass sie verschwindet für alle Punkte der Oberfläche σ, so liefert in der That die Gleichung

$$4\pi V_1 = - \int U \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma$$

die Lösung des an die Spitze dieses Paragraphen gestellten Problemes.

Um nun die vorstehende Gleichung zur Bestimmung von V für irgend einen Punkt innerhalb oder ausserhalb der geschlossenen Fläche σ zu benützen, während V auf σ selbst bekannt ist, hat U im Ganzen folgende Bedingungen zu erfüllen:

1) U muss zugleich mit seinen ersten Derivirten im ganzen innern Raume von σ, wenn V_1 sich auf einen innern Punkt bezieht, oder im ganzen äussern Raume, wenn V_1 sich auf einen äussern Punkt bezieht, endlich und stetig sein und allein in dem Punkte, auf welchen sich V_1 bezieht, wird U unendlich wie $\frac{1}{r}$ für $r = 0$.
2) U muss allenthalben der Gleichung $\Delta U = 0$ genügen.
3) U muss verschwinden für Punkte, die auf der Fläche σ selbst gelegen sind.

Wir wenden dieses Resultat auf zwei Beispiele an und zwar sei die erste Aufgabe die, V zu bestimmen, für alle Punkte innerhalb eines rechtwinkligen Parallelepipeds, wenn V auf der Oberfläche desselben selbst bekannt ist. Nehmen

wir die Begrenzungsebenen des Parallelepipeds parallel den Coordinatenebenen an und zwar seien dieselben dann

$$x = \pm \frac{a}{2}; \ y = \pm \frac{b}{2}; \ z = \pm \frac{c}{2},$$

so dass also drei aneinander stossende Kanten des Parallelepipedes sind a, b, c, und bestimmen wir zunächst V im Bezug auf einen innerhalb des Parallelepipedes gelegenen Punkt $x_1 y_1 z_1$, so ist nun die Function $U = F(x, y, z)$ gemäss den obigen Bedingungen zu bestimmen.

Setzen wir

$$F(a - x, y, z) = - F(x, y, z),$$

so entsteht hieraus für $x = \frac{a}{2}$

$$F\left(\frac{a}{2}, y, z\right) = - F\left(\frac{a}{2}, y, z\right) = 0,$$

unter der gemachten Annahme ist also die dritte Bedingung für die Begrenzungsfläche $x = + \frac{a}{2}$ des rechtwinkligen Parallelepipedes erfüllt.

Ist weiter

$$F(-a - x, y, z) = - F(x, y, z),$$

so ergiebt sich für $x = - \frac{a}{2}$

$$F\left(-\frac{a}{2}, y, z\right) = - F\left(-\frac{a}{2}, y, z\right) = 0;$$

erfüllt also $U = F(x, y, z)$ auch die letztere Bedingung, so genügt sie auch der obigen dritten Bedingung für die Begrenzungsfläche $x = - \frac{a}{2}$.

Beide eben für U gestellten Bedingungen lassen sich vereinigen unter der Form

$$1, \qquad F(\pm a - x, y, z) = - F(x, y, z).$$

Zugleich folgt

$$\frac{\partial}{\partial x} F(\pm a - x, y, z) = - \frac{\partial}{\partial x} F(x, y, z),$$

ändern sich also die Derivirten von $F(x, y, z)$ stetig, so gilt ein gleiches auch von den Derivirten von $F(\pm a - x, y, z)$.

Setzt man in $F(a - x, y, z)$ für x der Reihe nach

$-a-x,\ 2a+x,\ -3a-x,\ -4a+x,\ \ldots$ und benützt die Gleichung 1, so entsteht für irgend ein ganzes positives m

$$F[ma+(-1)^m x,\ y,\ z] = (-1)^m F(x,\ y,\ z);$$

substituirt man dagegen für x der Reihe nach $a-x$, $2a+x$, $3a-x$, $4a+x$, $5a-x$, ... in $F(-a-x,\ y,\ z)$ und benützt die Gleichung 1, so erhält man wiederum die vorige Gleichung, gültig für jedes ganze negative m.

Aus der Bedingung 1, für $U = F(x,\ y,\ z)$ folgt daher allgemeiner

$$2,\qquad F[ma+(-1)^m x,\ y,\ z] = (-1)^m F(x,\ y,\ z)$$

gültig für jedes ganze m.

Da wir ferner in derselben Art, wie wir eben im Bezug auf die Variable x in $F(x,\ y,\ z)$ verfahren sind, auch mit den Variablen y und z verfahren können, wenn wir nur statt a, b oder c setzen, so folgt, dass auch die Bedingungen gelten

$$3,\qquad \begin{aligned} F[x,\ nb+(-1)^n y,\ z] &= (-1)^n F(x,\ y,\ z) \\ F[x,\ y,\ pc+(-1)^p z] &= (-1)^p F(x,\ y,\ z) \end{aligned}$$

Oder allgemein, soll U im jetzigen Fall der Bedingung genügen, dass $U = F(x,\ y,\ z)$ auf der Oberfläche des rechtwinkligen Parallelepipedes verschwindet, so muss $U=F(x,y,z)$ der Bedingung genügen

$$4,\qquad \begin{aligned} F[ma+(-1)^m x,\ nb+(-1)^n y,\ pc+(-1)^p z] \\ = (-1)^{m+n+p} F(x,\ y,\ z), \end{aligned}$$

wenn m, n, p irgend welche ganze Zahlen bedeuten.

Damit U auch den übrigen an dasselbe gestellten Bedingungen genüge, brauchen wir U nur als Potentialfunction aufzufassen und zwar zunächst von einer Masse $+1$, die im Punkte $x_1 y_1 z_1$, innerhalb des Parallelepipedes, für welchen die Potentialfunction V_1 bestimmt werden sollte, gelegen ist. Dann aber fordert die Gleichung 4, dass U in gleicher Weise die Potentialfunction von Massen ± 1 in den Punkten

$$\begin{array}{lll} a-x_1,\ y_1,\ z_1 & x_1,\ b-y_1,\ z_1 & x_1,\ y_1,\ c-z_1 \\ 2a+x_1,\ y_1,\ z_1 & x_1,\ 2b+y_1,\ z_1 & x_1,\ y_1,\ 2c+z_1 \\ 3a-x_1,\ y_1,\ z_1 & x_1,\ 3b-y_1,\ z_1 & x_1,\ y_1,\ 3c-z_1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

$$
\begin{array}{lll}
ma+(-1)^m x_1, y_1, z_1 & x_1, nb+(-1)^n y_1, z_1 & x_1, y_1, pc+(-1)^p z_1 \\
-a-x_1, y_1, z_1 & x_1, -b-y_1, z_1 & x_1, y_1, -c-z_1 \\
-2a+x_1, y_1, z_1 & x_1, -2b+y_1, z_1 & x_1, y_1, -2c+z_1 \\
-3a-x_1, y_1, z_1 & x_1, -3b-y_1, z_1 & x_1, y_1, -3c-z_1 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
-ma+(-1)^m x_1, y_1, z_1 & x_1, -nb+(-1)^n y_1, z_1 & x_1, y_1 -pc+(-1)^p z_1
\end{array}
$$

sei, indem für diese Punkte U in gleicher Weise wie für den Punkt $x_1 y_1 z_1$ unendlich wird.

Die Lage der eben genannten Punkte lässt eine bemerkenswerthe physikalische Deutung zu. Bildet man z. B. von den beiden Punkten $ma+(-1)^m x_1, y_1, z_1$ und $-(m+1)a +(-1)^{m+1} x_1, y_1, z_1$ das arithmetische Mittel ihrer Abstände von einander, so erhält man $-\frac{a}{2}$; d.h. der Punkt $-(m+1)a +(-1)^{m+1} x_1, y_1, z_1$ liegt so, als ob er das Spiegelbild des Punktes $ma+(-1)^m x_1, y_1, z_1$ wäre, wenn die Begrenzung $x=-\frac{a}{2}$ des Parallelepipedes spiegelnd wäre. In gleicher Weise kann natürlich auch die Lage der andern genannten Punkte gedeutet werden. Zugleich erkennt man, dass, weil $x_1 < \frac{a}{2}$, $y_1 < \frac{b}{2}$, $z_1 < \frac{c}{2}$ sein muss, sämmtliche anzunehmende Massenpunkte ausserhalb des Parallelepipedes liegen, die Function U innerhalb des Parallelepipedes allein im Punkte $x_1 y_1 z_1$ unendlich wird.

Setzen wir nun

$$U=\Sigma \frac{(-1)^{m+n+p}}{\sqrt{[ma+(-1)^m x_1-x]^2+[nb+(-1)^n y_1-y]^2+[pc+(-1)^p z_1-z]^2}},$$

wobei sich die rechter Hand geforderte Summation über alle ganzen positiven und negativen m, n und p zu erstrecken hat, so genügt die für U gefundene Function allen an dieselbe gestellten Forderungen.

Wir suchen noch U in etwas bequemere Form zu bringen und gehen zu dem Zwecke aus von der bekannten über die Euler'schen Integrale zweiter Gattung geltenden Relation

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin x\pi},$$

welche für $x=\frac{1}{2}$ liefert

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-z} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{\pi},$$

oder, wenn $z = wt$, wo w ein constanter Factor sei

$$\frac{1}{\sqrt{w}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-wt} \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Setzt man für $\frac{1}{\sqrt{w}}$ irgend eines der Glieder, aus denen U besteht, so erhält man

$$U = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \Sigma(-1)^m e^{-[ma+(-1)^m x_1 - x]^2 t}$$

$$\Sigma(-1)^n e^{-[nb+(-1)^n y_1 - y]^2 t} \, \Sigma(-1)^p e^{-[pc+(-1)^p z_1 - z]^2} \frac{dt}{\sqrt{t}};$$

nun ist, wenn wir in $\Sigma(-1)^m e^{-[ma+(-1)^m x_1 - x]^2 t}$ die Glieder mit geradem und die mit ungeradem m für sich besonders nehmen

$$\Sigma(-1)^m e^{-[ma+(-1)^m x_1 - x]^2 t} = \Sigma e^{-[2ma + x_1 - x]^2 t} - \Sigma e^{-[2ma + a - x_1 - x]^2 t}$$

$$= e^{-(x_1 - x)^2 t} \Sigma e^{-m^2 4a^2 t + 4m(x - x_1) at} - e^{-(a - x_1 - x)^2 t} \Sigma e^{-m^2 4a^2 t + 4m(x + x_1 - a t)},$$

wo sich beide Summen auf alle ganzen m von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken.

Benützen wir nun die bekannte Definition der Thetafunction $\vartheta_3(z)$, nämlich

$$\vartheta_3(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_s\, e^{-s^2 \varrho - 2isz},$$

so entsteht

$$\Sigma(-1)^m e^{-[ma+(-1)^m x_1 - x]^2 t} = e^{-(x_1 - x)^2 t} \vartheta_3(2ai[x - x_1]t) - e^{-(a - x_1 - x)^2 t} \vartheta_3(2ai[x + x_1 - a]t),$$

wobei $\varrho = 4a^2 t$.

Analog entsteht für die andern in dem letzten Ausdrucke für U vorkommenden Summen:

$$\Sigma(-1)^n e^{-[nb+(-1)^n y_1 - y]^2 t} = e^{-(y_1 - y)^2 t} \vartheta_3(2bi[y - y_1]t) - e^{-(b - y_1 - y)^2 t} \vartheta_3(2bi[y + y_1 - b]t),$$

wobei jetzt $\varrho = 4b^2 t$

und

$$\Sigma(-1)^n e^{-[pc+(-1)^p z_1 - z]^2 t} = e^{-(z_1-z)^2 t}\,\vartheta_3(2ci[z-z_1]t)$$
$$- e^{-(c-z_1-z)^2 t}\,\vartheta_3(2ci[z+z_1-c]t),$$

und hierbei ist $\varrho = 4c^2 t$.

Setzen wir die gefundenen Werthe in den letzten Ausdruck für U ein, so wird

$$U = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \begin{Bmatrix} e^{-(x_1-x)^2 t}\,\vartheta_3(2ai[x-x_1]t) \\ -e^{-(a-x_1-x)^2 t}\,\vartheta_3(2ai[x+x_1-a]t) \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} e^{-(y_1-y)^2 t}\,\vartheta_3(2bi[y-y_1]t) \\ -e^{-(b-y_1-y)^2 t}\,\vartheta_3(2bi[y+y_1-b]t) \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} e^{-(z_1-z)^2 t}\,\vartheta_3(2bi[z-z_1]t) \\ -e^{-(c-y_1-y)^2 t}\,\vartheta_3(2ci[y+y_1-c]t) \end{Bmatrix}$$
$$\times \frac{dt}{\sqrt{t}},$$

wobei im ersten Factor unter dem Integralzeichen $\varrho = 4a^2 t$
„ zweiten „ „ „ „ $\varrho = 4b^2 t$
„ dritten „ „ „ „ $\varrho = 4c^2 t$.

Setzt man nun den Werth von $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=\frac{a}{2}}$, $\left(\frac{\partial U}{-\partial x}\right)_{x=-\frac{a}{2}}$, $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=\frac{b}{2}}$, $\left(\frac{\partial U}{-\partial y}\right)_{y=-\frac{b}{2}}$, $\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{z=\frac{c}{2}}$ und $\left(\frac{\partial U}{-\partial z}\right)_{z=-\frac{c}{2}}$ in die obige Gleichung

$$V_1 = -\int U\frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma$$

der Reihe nach für $\frac{\partial U}{\partial n}$ ein und integrirt über die entsprechenden Begrenzungsflächen des rechtwinkligen Parallelepipedes, so erhält man den Werth von V im Punkte $x_1 y_1 z_1$ oder V_1. Giebt man dem Punkte $x_1 y_1 z_1$ verschiedene Lagen innerhalb des rechtwinkligen Parallelepipedes, so erhält man auch die Function V für alle diese verschiedenen Lagen.

Wir stellen uns als zweite Aufgabe hin die Bestimmung der Potentialfunction V für alle Punkte innerhalb und ausserhalb einer Kugelfläche, wenn V für alle Punkte der Kugelfläche selbst bekannt ist.

Auch hier ist die wichtigste Arbeit die Bestimmung der

Function U, welche den Eingangs dieses Paragraphen gestellten Bedingungen genügt. Da aber für die jetzige Aufgabe am einfachsten die Lage eines Punktes im Raume bezogen wird auf ein gewöhnliches räumliches Polarcoordinatensystem der r, θ, φ, dessen Anfang der Kugelmittelpunkt ist, so hat U der Bedingung $\Delta U = 0$ zu genügen in der Form, wie in §. 3 als specieller Fall von III. angegeben wurde:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \sin\theta\right)}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Oder, wenn wir statt r als Variable lr einführen; da dann

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial lr}\left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r}\right) \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\left\{r^2 \cdot \frac{\partial}{\partial lr}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial lr}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial lr}\frac{\partial r}{\partial lr}\right\}$$

$$= \frac{\partial^2 U}{(\partial lr)^2} + \frac{\partial U}{\partial lr}$$

$$\frac{\partial^2 U}{(\partial lr)^2} + \frac{\partial U}{\partial lr} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \sin\theta\right)}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Setzen wir ferner

$$U = u r^\mu$$

wo μ ein constanter Werth ist, so ist

$$\frac{\partial U}{\partial lr} = r^\mu \frac{\partial u}{\partial lr} + \mu u r^\mu$$

$$\frac{\partial^2 U}{(\partial lr)^2} = r^\mu \frac{\partial^2 u}{(\partial lr)^2} + 2\mu r^\mu \frac{\partial u}{\partial lr} + \mu^2 u r^\mu,$$

folglich

$$\frac{\partial^2 U}{(\partial lr)^2} + \frac{\partial U}{\partial lr} = r^\mu \left\{\frac{\partial^2 u}{(\partial lr)^2} + (2\mu + 1)\frac{\partial u}{\partial lr} + \mu(\mu + 1)u\right\};$$

ausserdem ist

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \sin\theta\right)}{\partial \theta} = r^\mu \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \sin\theta\right)}{\partial \theta}$$

$$\frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = r^\mu \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Ist nun ausserdem noch $\mu = -\frac{1}{2}$, so hat U der Differentialgleichung zu genügen

$$5, \quad \frac{1}{\sqrt{r}}\left\{\frac{\partial^2 u}{(\partial lr)^2} - \frac{1}{4}u + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \sin\theta\right)}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right\} = 0.$$

Man erkennt hieraus, dass, wenn $u = U\sqrt{r}$ dieser Dif-

ferentialgleichung genügt, ihr auch $U = ur^{-\frac{1}{2}}$ selbst genügen muss. Durch diese Betrachtung ist es gelungen, die Bestimmung von U durch die von u zu treffen.

Setzen wir nun, so lange r kleiner ist als der Kugelradius a, $u = u_r = F(lr, \theta, \varphi)$, so handelt es sich noch darum, welchen Bedingungen u unterworfen sein soll, wenn es sich auf Punkte ausserhalb der Kugelfläche bezieht. Massgebend hierfür sind die allgemeinen am Anfange dieses Paragraphen angegebenen Bedingungen, denen U unterworfen sein soll. Wir setzen, wenn $r > a$,

$$6, \quad u_r = - u_{\frac{a^2}{r}} = - F\left(l\frac{a^2}{r}, \theta, \varphi\right),$$

wodurch offenbar die Werthe von u_r für $r > a$ zurückgeführt werden auf solche, wo $r < a$ ist $\left(\frac{a^2}{r} < a \text{ für } r > a\right)$.

Da ferner, wie die Differentialgleichung 5, lehrt, immer der Zusammenhang besteht, mag r grösser oder kleiner als a sein, $u_r = U_r \sqrt{r}$, wenn U_r den Werth von U im Punkte $r\theta\varphi$ bezeichnet, so folgt aus 6, für $r > a$

$$U\sqrt{r} = - U_{\frac{a^2}{r}} \sqrt{\frac{a^2}{r}}\,.$$

Oder

$$7, \quad U_r = - \frac{a}{r} U_{\frac{a^2}{r}}, \; r > a;$$

Durch die Gleichung 7, wird in ähnlicher Weise der Werth von U für Punkte ausserhalb der Kugel durch solche für Punkte innerhalb der Kugel erklärt, wie durch die Gleichung 6, im Bezug auf u geschah.

Lassen wir in 7, r dem Radius der Kugel a unendlich nahe kommen, so folgt

$$U_a = - U_a.$$

Erfüllt also die gesuchte Function U die Bedingung 7, so erfüllt sie auch die an sie gestellte Fundamentalbedingung, für die Punkte auf der Kugelfläche selbst zu verschwinden.

Die übrigen an U gestellten Fundamentalbedingungen können wir in ähnlicher Weise erfüllen wie früher, indem wir U als Potentialfunction auffassen.

Suchen wir nun zunächst die gesuchte Potentialfunction V zu bestimmen für irgend einen Punkt $r_1\ \theta_1\ \varphi_1$ im Innern der Kugel, so soll die Function U für diesen Punkt unendlich werden wie $\frac{1}{r}$ für $r = 0$ oder es soll für jenen Punkt $\lim_{r=0} (r_1 U_{r_1}) = 1$ werden, diess geschieht, wenn wir U herkommen lassen von einer Masse $+1$ im Punkte $r_1\ \theta_1\ \varphi_1$.

Setzen wir ferner in der Gleichung 7, statt $\frac{a^2}{r}\ r_1$, so ergiebt sich

$$-\frac{r_1}{a}\ U_{r_1} = U_{\frac{a^2}{r_1}}.$$

Hieraus folgt, dass im Punkte $\frac{a^2}{r_1}\ \theta_1\ \varphi_1$ U ebenfalls unendlich wird und zwar so, dass wenn δ den Abstand des ebengenannten Punktes von einem unendlich nahe benachbarten bezeichnet,

$$\delta\ U_{\frac{a^2}{r_1}} = -\frac{r_1}{a},$$

folglich auch

$$-\frac{a}{r_1}\ \delta\ U_{\frac{a^2}{r_1}} = 1.$$

Diese Bedingung wird erfüllt, wenn U ausser von der genannten Masse noch herkommt von der Masse $-\frac{a}{r_1}$ im Punkte $\frac{a^2}{r_1}\ \theta_1\ \varphi_1$.

Legen wir nun die Axe unseres räumlichen Polarcoordinatensystemes durch den Punkt $r_1\ \theta_1\ \varphi_1$ selbst, so ist die Potentialfunction des zuerst gefundenen Massenpunktes auf irgend einen Punkt $r\ \theta\ \varphi$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr_1\cos\theta + r_1^2}},$$

die des zweiten Massenpunktes:

$$-\frac{a}{r_1}\ \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\,\frac{a^2}{r_1}\cos\theta + \left(\frac{a^2}{r_1}\right)^2}}.$$

Die gesuchte Function U ist demnach

$$8, \quad U = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr_1\cos\vartheta + r_1^2}} - \frac{a}{r_1}\,\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\frac{a^2}{r_1}\cos\vartheta + \left(\frac{a^2}{r_1}\right)^2}}.$$

Man kann an diesem für U gefundenen Ausdruck leicht verificiren, dass er allen an ihn im Anfange dieses Paragraphen gestellten Forderungen genüge leistet.

Besonders bemerkt mag hier noch werden, dass auch U verschwindet für unendlich entfernte Punkte.

Denken wir uns ferner $r_1 > a$, so erkennt man auch leicht, dass der vorstehende Ausdruck 8, für U allen den Fundamentalbedingungen genügt, denen er genügen muss, wenn die von nur auf der Kugelfläche gelegenen Massen herkommende Potentialfunction V für irgend welche Punkte ausserhalb der Kugelfläche bestimmt werden soll.

In diesem Falle brauchen wir uns nämlich nur den ausserhalb der Kugel gelegenen Raum begrenzt zu denken durch die gegebene Kugelfläche und durch eine mit ihr concentrische mit unendlich grossem Radius. In diesem Falle lautet also die Gleichung, welche V für irgend einen Punkt r_1 ausserhalb der gegebenen Kugelfläche bestimmt:

$$4\pi V_1 = -\int V_{r=a}\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{r=a} d\sigma - \int V_{r=\infty}\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{r=\infty} d\sigma_1;$$

eine Gleichung, in der man an den angehängten Indexen leicht erkennt, auf welche der beiden Begrenzungsflächen des äussern Raumes sich jedes der beiden Integrale bezieht.

Nun ist ferner leicht ersichtlich, dass das letzte Integral rechter Hand verschwindet, es bleibt also allein übrig

$$4\pi V_1 = -\int V_{r=a}\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_{r=a} d\sigma.$$

Ganz dieselbe Gleichung erscheint aber der Form nach auch, wenn V_1 sich bezieht auf einen Punkt innerhalb der Kugel. In der That besteht der einzige Unterschied beider Fälle nur darin, nach welcher Richtung das positive Normalenelement ∂n zu nehmen ist. Während nämlich in dem Falle, wo V_1 sich auf einen Punkt innerhalb der Kugelfläche bezieht, das positive Normalenelement ∂n mit ∂r identisch ist, ist im andern Falle, wenn V_1 sich auf einen Punkt ausserhalb der gegebenen Kugelfläche bezieht, $\partial n = -\partial r$.

Wir können daher beide Fälle der Reihe nach zusammenfassen in der Formel

$$9, \quad 4\pi V_1 = \mp \int V_{r=a} \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=a} d\sigma \quad \begin{matrix} r < a \\ r > a \end{matrix}.$$

Aus der Gleichung 8, findet man leicht

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r=a} = - \frac{a - r_1 \cos\theta}{\sqrt{a^2 - 2ar_1\cos\theta + r_1^2}^3} + \frac{a}{r_1} \frac{a - \frac{a^2}{r_1}\cos\theta}{\sqrt{a^2 - 2a\frac{a^2}{r_1}\cos\theta + \left(\frac{a^2}{r_1}\right)^2}^3}$$

$$= \frac{1}{a} \frac{r_1^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - 2ar_1\cos\theta + r_1^2}^3};$$

Setzen wir ferner $V_{r=a} = f(\theta, \varphi)$; $d\sigma = a^2 \sin\theta d\theta d\varphi$, so erhalten wir schliesslich

$$10, \quad 4\pi V_1 = \mp a(r_1^2 - a^2) \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\sqrt{a^2 - 2ar_1\cos\theta + r_1^2}^3}. \quad \begin{matrix} r_1 < a. \\ r_1 > a. \end{matrix}$$

Man kann an diesem Resultat leicht noch bestätigen, dass V auch in unmittelbarer Nähe der Kugelfläche stetig ist. Ist nämlich diess der Fall, so müssen beide der in 10, enthaltenen Gleichungen für $r = a$ den Werth von V geben, den es auf der Kugelfläche selbst hat.

Setzen wir zu diesem Zwecke

$$\int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi)\, d\varphi = F(\theta),$$

so entsteht aus 10, durch partielle Integration:

$$11, \quad 4\pi V_1 = \mp a(r_1^2 - a^2)$$

$$\left\{ -\frac{1}{ar_1}\frac{F(\pi)}{a+r_1} + \frac{1}{ar_1}\frac{F(0)}{\pm(a - r_1)} + \frac{1}{ar_1}\int_0^{\pi} \frac{F'(\theta)\, d\theta}{\sqrt{a^2 - 2ar_1\cos\theta + r_1^2}} \right\}. \quad \begin{matrix} r_1 < a \\ r_1 > a \end{matrix}$$

Wo im zweiten Gliede in der Klammer der rechten Seite $\pm(a - r_1)$ geschrieben ist, weil immer nur der absolute Werth der Differenz $a - r_1$ in Rechnung zu ziehen ist.

Aus der Gleichung 11, wird einfacher

$$12, \quad V_1 = \pm \frac{1}{4\pi r_1} F(\pi)(r_1 - a) + \frac{1}{4\pi r_1} F(0)(r_1 + a)$$

$$\mp \frac{r_1^2 - a^2}{4\pi r_1} \int_0^{\pi} \frac{F'(\theta)\, d\theta}{\sqrt{a^2 - 2ar_1\cos\theta + r_1^2}}. \quad \begin{matrix} r_1 < a \\ r_1 > a \end{matrix}$$

Lassen wir jetzt in diesem Ausdrucke $r_1 = a$ werden, so entsteht

$$V_1 = \frac{1}{2\pi} F(0).$$

In der That ist aber $\frac{1}{2\pi} F(0)$ der Mittelwerth, den V im Durchschnittspunkte der Polaraxe mit der Kugelfläche besitzt, und da die Lage der Polaraxe nur abhängig ist von der übrigens beliebigen Lage des Punktes, auf den sich V_1 bezieht, so ist das eben erlangte Resultat auch für alle anderen Punkte der Kugelfläche bewiesen.

§. 6.

Zusammenhang zwischen den Derivirten der Potentialfunction V und den sie erzeugenden Massen, wenn letztere nur in einer unendlich dünnen Schicht vorhanden sind.

Erfüllen die Massen, welche die Potentialfunction V erzeugen, einen schalenförmigen Raum, dessen äussere Oberfläche σ, dessen innere σ_1 ist, und gehört zum Flächenelement $d\sigma$ das Normalenelement dn, zum Flächenelement $d\sigma_1$ das Normalenelement dn_1, so folgt aus Gleichung II, §. 4, für jeden Punkt, der nicht dem schalenförmigen mit Masse erfüllten Raume angehört:

$$\int (V \Delta U - U \Delta V) dk = \int \left(V \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial V}{\partial n} \right) d\sigma + \int \left(V \frac{\partial U}{\partial n_1} - U \frac{\partial V}{\partial n_1} \right) d\sigma_1.$$

Ist nun $U = \frac{1}{r}$, wo das Centrum der r der Punkt ist, auf den sich V bezieht, so ist

$$\int V \Delta U \, dk = \int V \Delta \frac{1}{r} \, dk = 0$$

$$\int U \Delta V \, dk = \int - \frac{4\pi\varrho}{r} \, dk = -4\pi V,$$

wenn ϱ die Massendichtigkeit innerhalb der Schale bezeichnet. Aus der vorigen Gleichung entsteht demnach:

$$4\pi V = -\int \frac{\frac{\partial V}{\partial n}}{r} d\sigma - \int \frac{\frac{\partial V}{\partial n_1}}{r} d\sigma_1 + \int V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \int V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} d\sigma_1.$$

Diese Gleichung muss gelten, wie nahe auch die beiden Flächen σ und σ_1 aneinander liegen oder wie dünn auch die mit Masse angefüllte Schale sein möge. Lassen wir die

Schale unendlich dünn werden, und sind dabei die Flächen σ und σ_1 so beschaffen, dass die absoluten Werthe von $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$ und $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1}$ sich nur um eine unendlich kleine Grösse unterscheiden, so ist, weil ∂n und ∂n_1 entgegengesetzte Richtung besitzen:

$$\int V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \int V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} d\sigma_1 = 0$$

und aus der vorigen Gleichung wird einfach

$$V = \int \frac{-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n_1}\right) d\sigma}{r}.$$

Andererseits ist aber nach der Bedeutung von V auch

$$V = \int \frac{\varrho}{r} d\sigma.$$

Die beiden letzten Gleichungen gelten nun, wie auch die Dichtigkeit ϱ der Massen in der unendlich dünnen Schale beschaffen sein möge, sie können daher zugleich nur bestehen, wenn

$$-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n_1}\right) = \varrho,$$

oder wie wir, zugleich um anzudeuten wie die Differentiationen $\frac{\partial V}{\partial n}$ und $\frac{\partial V}{\partial n_1}$ zu verstehen sind, besser schreiben:

$$\text{I,} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0} = -4\pi\varrho.$$

Diese Gleichung gilt also so lange, als man im Stande ist, zu der gegebenen Fläche σ eine andere unendlich nahe anzunehmen, derart, dass die Richtung der Normalen beider Flächen sich nur unendlich wenig von einander unterscheiden.

Die Gleichung I, zeigt, dass, wenn V herkommt von Massen, die in einer unendlich dünnen Schicht enthalten sind oder die, wie wir auch sagen können, über eine Fläche mit der Dichtheit ϱ verbreitet sind, ihre ersten partiellen Derivirten sich beim Durchgang des Punktes, auf den sie

sich beziehen, durch die mit Masse belegte Fläche plötzlich um $-4\pi\varrho$ unterscheiden.

An diesem Resultate ändert sich nichts wesentliches, wenn V auch noch herkommt von Massen, die ganz ausserhalb der unendlich dünnen Schale liegen.

Die Gleichung I, bildet die Ergänzung zu dem, was in §. 2. und §. 3. über die partiellen Derivirten der Potentialfunction V bemerkt wurde und lässt nun zugleich leicht erkennen, warum in unmittelbarer Nähe der mit Masse belegten Fläche nicht mehr von dem Ausdruck ΔV die Rede sein kann, weil bei unstetiger Aenderung der ersten Derivirten die zweiten Derivirten keine angebbaren Werthe besitzen können.

§. 7.

Ueber den Verlauf der Potentialfunction V für Punkte, die ausserhalb der sie erzeugenden Massen liegen.

Wir wenden die Gleichung II, §. 4. an auf einen beliebigen von der Fläche σ begrenzten Raum, der ganz ausserhalb des Raumes liegt, in welchem die die Potentialfunction V erzeugenden Massen gelegen sind. Alsdann ist

$$\Delta V = 0.$$

Für U nehmen wir ferner die Function $\frac{1}{r} + f(r)$, wo das Centrum der r der Punkt ist, auf den sich V bezieht und $f(r)$ eine Function, die im ganzen von der Fläche σ umschlossenen Raume endlich bleibt und der Gleichung $\Delta f(r) = 0$ genügt. Dann entsteht aus der genannten Gleichung:

$$\int \left(V \frac{\partial\left(\frac{1}{r} + f(r)\right)}{\partial n} - U \frac{\partial V}{\partial n} \right) d\sigma = 0.$$

Die Oberfläche σ sei nun die Begrenzungsfläche einer concentrischen Kugelschale, deren äusserer Radius a, deren innerer t ist; der Mittelpunkt sei das Centrum der r. Dann ist, bezogen auf die Kugelfläche mit dem Radius a

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r} + f(r)\right)}{\partial n} = \left(\frac{\partial\left(\frac{1}{r} + f(r)\right)}{\partial r} \right)_{r=a}; \quad \frac{\partial V}{\partial n} = \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=a};$$

bezogen auf die Kugelfläche mit dem Radius t

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}+f(r)\right)}{\partial n}=-\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{r}+f(r)\right)}{\partial r}\right)_{r=t};\ \frac{\partial V}{\partial n}=-\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=t}.$$

Es entsteht aus der obigen Grundgleichung:

$$\int\left(V\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{r}+f(r)\right)}{\partial r}\right)_{r=a}-\left(\frac{1}{r}+f(r)\right)\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=a}\right)a^2dw$$

$$+\int\left(V\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{r}+f(r)\right)}{\partial r}\right)_{x=t}-\left(\frac{1}{r}+f(r)\right)\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=t}\right)t^2dw=0,$$

wenn dw den körperlichen Winkel bezeichnet, unter welchem das Flächenelement einer der beiden Kugeln vom Mittelpunkte aus gesehen wird.

$f(r)$ genügt den an dasselbe gestellten Forderungen, wenn

$$f(r)=-\frac{1}{a},$$

dann aber wird die vorige Gleichung einfacher zu

$$\int V\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial r}\right)_{r=a}a^2dw-\int\left(V\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial r}\right)_{r=t}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=t}\right)t^2dw=0.$$

Lassen wir jetzt t ins Unendliche abnehmen, so verschwindet

$$\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=t}t^2\,dw$$

und von der vorigen Gleichung bleibt allein:

$$-\int\frac{V}{a^2}a^2dw+\int\frac{V}{t^2}t^2\,dw=0.\quad \text{Lim}\ t=0.$$

Oder, wenn wir den Werth von V im Kugelmittelpunkt mit V_0 bezeichnen

$$V_0\int dw=\int\frac{V}{a^2}a^2\,dw.$$

Aus dieser, in a^2 multiplicirten Gleichung folgt nun:

$$V_0=\frac{\int Va^2dw}{\int a^2\,dw},$$

der Werth von V im Kugelmittelpunkt ist demnach der Mittelwerth von den Werthen, die V auf der Kugelfläche besitzt, hieraus folgt aber der Satz:

Ueberall da, wo die Potentialfunction V der Differentialgleichung $\Delta V = 0$ genügt, kann diese Function weder ein Maximum noch ein Minimum besitzen.

§. 8.
Die Fundamentaleigenschaften der Potentialfunction V.

Sollen gewisse Eigenschaften einer Function V Fundamentaleigenschaften derselben sein, so muss gezeigt werden, nicht nur dass ihr immer diese Eigenschaften zukommen, sondern auch dass umgekehrt immer eine und nur eine Function existirt, die diese Eigenschaften besitzt.

Als solche Fundamentaleigenschaften der Potentialfunction V können die folgenden angenommen werden:

1) Die Function V ist nebst ihren ersten Derivirten innerhalb eines geschlossenen Raumes T allenthalben endlich und stetig
2) Die Function V genügt innerhalb des Raumes T allenthalben der Differentialgleichung $\Delta V = 0$.
3) Die Function V nimmt auf der Oberfläche σ des Raumes T gegebene Werthe an.

Ist V die Potentialfunction gegebener Massen, die nicht mit im Raume T enthalten sind, so haben die bisherigen Betrachtungen genugsam gelehrt, dass ihr die eben genannten Eigenschaften zukommen, wir haben daher hier nur noch zu zeigen, dass durch diese Eigenschaften V eindeutig bestimmt ist. Wir gehen zu diesem Zwecke mit Gauss und Dirichlet aus von dem Integrale

$$\Omega_u = \int\int\int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right\} dx\, dy\, dz,$$

das über den ganzen Raum T zu erstrecken ist, innerhalb dessen u mit seinen ersten partiellen Derivirten allenthalben endlich und stetig ist und auf dessen Oberfläche u dieselben Werthe haben möge wie V.

Das Integral Ω_u besitzt nur positive Elemente, durch Variation der Function u muss es also möglich sein, dem Ω_u mindestens einen Minimumswerth beizulegen.

Es werde nun Ω_u ein Minimum für $u = V$, dann ist also

$$\Omega_V \overline{\gtrless} \Omega_{V+\delta V},$$

wenn δV eine Aenderung der Function V bezeichnet, die für Punkte der Oberfläche des Raumes T verschwinden muss, und es existirt immer mindestens eine solche Function V, für die die vorige (Un) Gleichung gilt.

Wir setzen $\delta V = hs$, wo h ein entsprechend kleiner constanter Factor sein möge und s eine beliebige Function des Ortes, die aber für die Punkte der Fläche σ verschwindet.

Dann gilt also

$$\Omega_V \overline{\gtrless} \Omega_{V+hs};\ \Omega_{V+hs} - \Omega_V \geqq 0;$$

$$u = V + hs$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} + h\frac{\partial s}{\partial x};\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} + h\frac{\partial s}{\partial y};\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z} + h\frac{\partial s}{\partial z}.$$

Nach der Definition von Ω_u ist aber

$$\Omega_{V+hs} - \Omega_V = \iiint \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x} + h\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + h\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + h\frac{\partial s}{\partial z}\right)\right\}^2 dx dy dz$$

$$- \iiint \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right\} dx\, dy\, dz \overline{\gtrless} 0.$$

Hieraus folgt:

$$2h \iiint \left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial s}{\partial z} \right) dx\ dy\ dz$$

$$+ h^2 \iiint \left\{ \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2 \right\} dx\, dy\, dz \overline{\gtrless} 0.$$

Soll, wie es sein muss, diese Ungleichung erfüllt sein, welchen Werth auch h besitzen möge, so muss das in h multiplicirte Glied verschwinden oder es muss sein

$$\iiint \left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial s}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz = 0.$$

Da nun, weil $\delta V = hs$, auch s eine Function ist, die mit ihren ersten Derivirten im ganzen Raume T allenthalben

endlich und stetig sein muss, so können wir auf das letztere Integral dieselbe Transformation anwenden, die in §. 4. auf das Integral I angewendet wurde. Dann entsteht aus dem letzten Integral:

$$-\iiint s\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz+\int s\,\frac{\partial V}{\partial n}\,d\sigma=0.$$

Oder, weil s für Punkte auf der Oberfläche σ verschwindet, also auch

$$\int s\,\frac{\partial V}{\partial n}\,d\sigma=0$$

$$\iiint s\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz=0.$$

Da s eine willkürliche Function des Ortes ist, so kann diese letzte Gleichung für ein beliebiges s nur erfüllt sein, wenn:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\Delta V=0.$$

Somit ist bewiesen, dass, weil die Function V, die Ω_u zu einem Minimum macht, sicher existirt, und weil diese Function V durch die an die Spitze dieses Paragraphen gestellten Eigenschaften derselben bestimmt ist, die eben genannten Eigenschaften alsdann V vollständig bestimmen, wenn es nur eine einzige Function V giebt, die ihnen genügen kann.

Gesetzt es gäbe nun noch eine andere Function $V'=V+s$, die ebenfalls wie V die ebengenannten Eigenschaften besitzt, also auch Ω_u zu einem Minimum macht, dann folgt aus der Bedingung, dass Ω_V ein Minimum sein soll:

$$1,\quad \Omega_{V+hs}-\Omega_V=h^2\,\Omega_s.$$

Es ist aber auch $\Omega_{V'}=\Omega_{V+s}=\Omega_V+\Omega_s$

$$\text{also}\quad 2,\quad \Omega_{V'}-\Omega_V=\Omega_s.$$

Aus 1, und 2, folgt, wenn Ω_s nicht verschwindet, da man dem h jeden beliebigen kleinen Werth beilegen, also auch $h<1$ annehmen kann

$$\Omega_{V'}>\Omega_{V+hs}.$$

Verschwindet also Ω_s nicht, so kann auch $\Omega_{V'}$ kein Minimum sein, verschwindet aber Ω_s, so folgt, dass

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial z} = 0.$$

Dann aber ist s eine Constante, deren Werth, weil s für die Punkte auf der Fläche σ verschwindet, nur Null sein kann, dann ist auch $V' = V$, also die Function selbst, von der bereits vorausgesetzt wurde, dass sie Ω_u zu einem Minimum mache.

Es giebt demnach nur eine Function, welche Ω_u zu einem Minimum macht.

Wir haben somit gesehen, es giebt nur eine und auch stets eine Function des Ortes V, die

1) zugleich mit ihren ersten partiellen Derivirten innerhalb eines gegebenen massenleeren geschlossenen Raumes T allenthalben endlich und stetig ist, die
2) innerhalb des Raumes T allenthalben der Differenzialgleichung $\Delta V = 0$ genügt und die
3) an der Oberfläche σ des Raumes T gegebene Werthe hat.

Anmerkung. Die Bedingung, dass V eine Function des Ortes sein soll, kann auch vertreten werden durch die Bedingung, dass V für unendlich entfernte Punkte verschwinden soll.

§. 9.

Die Niveauflächen der Potentialfunction V.

Denkt man sich alle die Punkte im Raume aufgesucht, für welche die von irgend welchen gegebenen Massen erzeugte Potentialfunction V denselben Werth a hat, so liegen, weil V eine stetige Function des Ortes ist, alle diese Punkte auf einer gewissen Fläche, deren Gleichung dargestellt wird durch

$$1, \quad V = a = \text{Const.}$$

Legt man durch irgend einen Punkt M dieser Fläche eine Tangente s, so ist die in die Richtung dieser Tangente entfallende Componente der auf den Punkt M wirkenden beschleunigenden Kraft nach §. 1.

$$-\frac{\partial V}{\partial s} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\right).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung stellt aber auch dar das Aenderungsgesetz von V längs des Tangendifferentiales ds; da aber V längs desselben constant gleich a ist, so verschwindet diese rechte Seite, mithin ist auch

$$2, \quad -\frac{\partial V}{\partial s} = 0.$$

Hierin ist der Satz ausgesprochen: Die in den Punkten der Fläche $V = a =$ Const. wirksamen Kräfte sind immer normal zur Fläche gerichtet.

Die Analogie, die hinsichtlich dieser Eigenschaft die Fläche $V = a$ mit den Niveauflächen flüssiger Körper zeigt, hat bewirkt, dass man auch die Fläche $V = a$ eine Niveaufläche nennt.

Aendert sich a um den beliebig kleinen Werth Δa, so ist auch $V_1 = V + \Delta V = a + \Delta a$ eine Niveaufläche, die mit der Niveaufläche $V = a$ keinen Punkt gemein haben kann, weil für jenen gemeinsamen Punkt der Werth der Potentialfunction sowohl gleich a, wie auch gleich $a + \Delta a$ sein müsste, was ungereimt ist.

Ist Δa unendlich klein, etwa gleich ∂a, so ist auch, weil V immer eine stetige Function ist, statt ΔV dV zu setzen und bezeichnet ∂n das Normalendifferential der Niveaufläche $V = a$ gerechnet bis zur Niveaufläche $V + \partial V = a + \partial a$, so folgt

$$3, \quad \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial a}{\partial n}.$$

Man nennt auch hier, in Analogie zu den Erscheinungen bei flüssigen Körpern, den Grenzwerth des Verhältnisses der Aenderung der Potentialfunction zu der Strecke, bis zu deren Endpunkte die Aenderung erlangt ist, das Gefälle der Potentialfunction.

Die, im Allgemeinen krummen, Linien, welche die in den Gefällen der successiven Niveauflächen enthaltenen Normalendifferentiale in ihrer Gesammtheit bilden, nennt man die Kraftlinien des gegebenen Massensystemes.

Für jedes im Endlichen gelegene Massensystem ist eine Niveaufläche diejenige, für welche der constante Werth der Potentialfunction Null beträgt. Diese Niveaufläche ist nach

§. 2. eine Kugel mit unendlich grossem Radius, deren Centrum im Endlichen liegt.

Da die Normalen einer Kugelfläche mit deren Radien einerlei Richtung haben, so folgt aus dem vorigen Resultate, dass sich die Kraftlinien im Allgemeinen asymptotisch den Fahrstrahlen nähern, die von einem Punkte im Endlichen aus nach allen Richtungen hin gezogen werden.

Wenden wir den Satz I, in §. 3. auf die eben genannte Niveaufläche an, so folgt

$$\lim_{R=\infty} \int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = -4\pi Q,$$

wenn Q bezeichnet die Gesammtmasse aller im Endlichen gelegenen die Potentialfunction V erzeugenden Massen.

Nun ist $d\sigma = R^2 d\omega$, wenn $d\omega$ bezeichnet den körperlichen Winkel, unter welchem das Kugelflächenelement $d\sigma$ vom Mittelpunkte aus gesehen wird, es entsteht also aus der vorigen Gleichung

$$\int \lim_{R=\infty} \left(\frac{\partial V}{\partial n} R^2\right) d\omega = -4\pi Q.$$

Hieraus folgt, dass die Gesammtmasse Q der Mittelwerth von $\lim_{R=\infty} \frac{\partial V}{\partial n} R^2$ ist.

Wir gehen jetzt von der Frage aus, ob und unter welchen Bedingungen das Gefälle $\frac{\partial V}{\partial n}$ verschwinden, also V innerhalb einer, wenn auch unendlichen dünnen Schicht constant sein kann.

Ist V innerhalb eines gegebenen Raumes constant, etwa gleich a, so folgt für diesen Raum aus $V = a$, $\Delta V = 0$, nach §. 3. muss dann aber auch die Massendichtigkeit innerhalb dieses Raumes verschwinden. Wir erhalten daher zunächst das Resultat: Ist die Potentialfunction V innerhalb eines gegebenen Raumes allenthalben constant, so können die die Potentialfunction V erzeugenden Massen entweder nur in einer unendlich dünnen Schicht an der Oberfläche des gegebenen Raumes gelegen sein oder sie liegen ganz ausserhalb des gegebenen Raumes.

Um zu entscheiden, welcher von diesen beiden Fällen [illegible], denken wir uns einen allseitig geschlossenen Raum T mit [illegible] die die Potentialfunction V [illegible] Massen in beliebiger Anordnung. Innerhalb des Raumes T gebe es nun einen zweiten allseitig begrenzten Raum T', der auch eine unendlich dünne Schicht sein kann, in dem aber die Potentialfunction V allenthalben den constanten Werth V_0 haben möge. Wir wenden nun den in § 7. [illegible] Satz auf den Raum T an, indem wir von der Gleichung $V_1 = \frac{\int V a^2 d\omega}{\int a^2 d\omega}$ in der Art Gebrauch machen, dass wir den Kugelmittelpunkt, auf welchen sich V_1 bezieht, irgend wohin in den Raum T' verlegen und zwar so, dass nach zweckmässig gewähltem Kugelradius a ein Theil der Kugelfläche im Raume T', ein anderer Theil aber ausserhalb desselben liegt, der Art, dass auf dem letzteren Theile die Potentialfunction V entweder nur wächst oder nur abnimmt. Da V eine stetige Function ist, so muss der eben gestellten Forderung immer durch zweckmässige Wahl der Lage des Kugelmittelpunktes und des Kugelradius genügt werden können. Soll nun aber für diese Kugelfläche die Gleichung $V_0 = \frac{\int V a^2 d\omega}{\int a^2 d\omega}$ bestehen, so ist dieses, weil V für alle Punkte der Kugelfläche, die innerhalb des Raumes T' liegen, den constanten Werth V_0 hat, und weil V für die Punkte der übrigen Kugelfläche entweder nur zunehmen oder nur abnehmen soll, nicht anders möglich, als dass auch für diese letztgenannten Punkte V allenthalben den constanten Werth V_0 besitzt.

Es muss aber auch die Potentialfunction V denselben Werth V_0 in allen den Punkten besitzen, die zu dem Raume gehören, der von der Kugel und der Begrenzung des Raumes T' aus T abgetrennt wird. Wäre diess nämlich nicht der Fall, so könnte man durch den fraglichen Raum eine gerade Linie legen, die dessen Begrenzung mindestens zweimal schnitte. In den Durchschnittspunkten hätte V den constanten Werth V_0, dagegen in den übrigen im fraglichen Raume gelegenen Punkten verschiedene Werthe, folglich auch, weil V eine stetige Function ist, mindestens ein relatives

Maximum oder Minimum. Von einem solchen Punkte, in welchem V ein relatives Maximum oder Minimum besitzt, könnte man ausgehen und die Nachbarpunkte aufsuchen, in denen resp. V noch grösser oder noch kleiner wäre; von den so gefundenen Punkten aus könnte man wieder die Werthe von V in den Nachbarpunkten aufsuchen und die Punkte festhalten, in denen V resp. noch grösser oder noch kleiner wäre. Denkt man sich diess Verfahren weit genug fortgesetzt, so muss man endlich auf Punkte kommen, in denen V ein wirkliches Maximum oder Minimum erreichte, diess aber widerspricht dem Resultate des §. 7, es kann also auch in dem fraglichen Raume die Potentialfunction V allenthalben nur den constanten Werth V_0 aufweisen.

Rechnen wir jetzt diesen letzteren Raum mit zu T', so können wir von neuem und beliebig oft das eben aus einander gesetzte Verfahren auf die beiden geschlossenen Räume T und T' anwenden, bis wir nachgewiesen haben, dass im ganzen Raume T die Potentialfunction V denselben constanten Werth V_0 haben muss. Umschliessen alsdann die mit Masse angefüllten Räume den Raum T allseitig, so folgt noch aus der Stetigkeit der Function V, dass auch in allen Punkten der Grenzfläche des Raumes T, V den constanten Werth V_0 besitzen muss. Wir kommen demnach zu dem Resultate: Die Potentialfunction von Massen, die sämmtlich ausserhalb eines Raumes T liegen, kann nicht in einem Theile dieses Raumes einen constanten Werth und zugleich in einem andern Theile desselben Raumes einen verschiedenen Werth haben; umschliessen dabei die mit Masse erfüllten Räume den Raum T allseitig, so muss zugleich auch auf der Grenzfläche des Raumes T die Potentialfunction denselben constanten Werth besitzen.

Ist aber der Raum T nicht allseitig von massenerfüllten Räumen, die innerhalb T die constante Potentialfunction V_0 erzeugen, umgeben, so kann man in der angeführten Weise die Potentialfunction zwischen den mit Masse erfüllten Räumen hindurch fortsetzen und zeigen, dass sie allenthalben im ganzen unendlichen Raume mit einziger Ausnahme der

massenerfüllten Räume selbst, denselben constanten Werth V_1 besitzen muss. Da aber die Potentialfunction für unendlich entfernte Punkte verschwindet, so kann auch der Werth von V_1 kein anderer als Null sein, wir erhalten demnach zum vorigen Satz noch die Ergänzung:

Umschliessen aber die massenerfüllten und die Potentialfunction V erzeugenden Räume den Raum T nicht vollständig, so kann der constante Werth der Potentialfunction nur Null sein und derselbe Werth gilt dann auch für den ganzen unendlichen Raum, ausgenommen die massenerfüllten Räume selbst.

Umschliessen wir ferner jeden einzelnen der mit Masse erfüllten Räume durch Flächen und wenden auf diese Flächen den Satz I, in §. 3. an, nämlich

$$\int \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma = -4\pi Q,$$

wenn Q die Gesammtmasse in dem von der Hülfsfläche σ umschlossenen Raume bezeichnet, so ist nach dem eben erlangten Satze für alle Punkte von σ $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$, es verschwindet demnach die linke Seite der vorigen Gleichung, folglich ist auch $Q = 0$. Zu dem vorigen Satze tritt daher noch die Erweiterung: Der constante Werth Null der Potentialfunction im ganzen nicht von Masse erfüllten unendlichen Raume ist nur möglich, wenn die Gesammtmasse jedes einzelnen massenerfüllten Raumes verschwindend ist.

Zugleich folgt auch jetzt wieder aus dem Umstande, dass V eine allenthalben stetige Function ist, dass auch auf den Begrenzungsflächen der massenerfüllten Räume V den constanten Werth Null haben muss.

Als Antwort auf die ursprünglich gestellte Frage haben wir nun erhalten: Soll das Gefälle der Potentialfunction V verschwinden, so ist diess nur möglich entweder in einem Raume, der allseitig geschlossen ist durch massenerfüllte Räume, deren Massen die Potentialfunction V erzeugen; innerhalb des genannten Raumes hat alsdann V einen belie-

bigen aber constanten Werth; oder im ganzen nicht von Masse erfüllten unendlichen Raume, dann aber hat in diesem ganzen Raume die Potentialfunction den constanten Werth Null und die Gesammtmasse jedes einzelnen mit Masse erfüllten Raumes ist ebenfalls Null.

Hat ferner die Potentialfunction V für alle Punkte einer beliebigen geschlossenen Fläche σ einen constanten Werth A, und liegen innerhalb der Fläche σ keine Massen, welche die Potentialfunction V mit erzeugten, so kann man in analoger Weise, wie in der vorhergehenden Betrachtung darthun, dass auch V in allen Punkten innerhalb der Fläche σ denselben constanten Werth A besitzen muss, indem man zeigt, dass, wenn diess nicht der Fall wäre, V innerhalb der Fläche σ irgend wo ein Maximum oder Minimum besitzen müsste, was dem Resultate des §. 7 widerspräche. Wir erhalten also noch den Satz:

Hat die Potentialfunction V auf einer geschlossenen Oberfläche σ einen constanten Werth und kommt sie her von Massen, die sämmtlich auf oder ausserhalb dieser Oberfläche liegen, so hat sie denselben Werth auch in dem ganzen Raume, der von der Oberfläche σ umschlossen ist.

Wenden wir diesen Satz an auf die in §. 6. erlangte Relation

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0} = -4\pi\varrho,$$

so folgt

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0} = 0,$$

und es ist

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} = -4\pi\varrho.$$

Nach dem vorigen über das Gefälle erlangten Satze verschwindet nun entweder $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0}$ an keiner Stelle der Oberfläche σ, es bleibt also kein Element der Oberfläche massenleer, oder es verschwindet $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0}$ an allen Punkten der Oberfläche σ, die Oberfläche σ besitzt also gar keine Bele-

gung mit Masse. Der letztere Fall tritt dann ein, wenn im ganzen unendlichen, nicht mit Masse erfüllten Raume die Potentialfunction constant Null ist. Es erfolgt diess, wenn die Gesammtmasse jedes einzelnen massenerfüllten Raumes verschwindet; dass der letztere Fall auch nur dann eintritt, wenn die einzelnen Gesammtmassen verschwinden, wird die folgende Betrachtung lehren.

Es sei $V = A$ eine allseitig geschlossene Niveaufläche, innerhalb deren entweder oder auf der sämmtliche Massen liegen, welche die Potentialfunction V erzeugen. Dann kann für irgend einen Punkt P ausserhalb der Fläche $V = A$ der Werth der Potentialfunction nur liegen zwischen 0 und A und muss gleiches Vorzeichens mit A sein. Wäre diess nämlich nicht der Fall, so müsste die Potentialfunction V, weil sie allenthalben stetig ist und für unendlich entfernte Punkte verschwindet, irgend wo im äussern Raume ein Maximum oder Minimum besitzen, was gegen das Resultat des §. 7. ist.

Ist weiter A ein positiver Werth, so ist nach dem ebengesagten $\frac{\partial A}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial n}$ ein negativer und umgekehrt, ist A ein negativer Werth, so ist $\frac{\partial A}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial n}$ ein positiver Werth, beides gültig für alle Punkte der Niveaufläche $V = A$. Bezogen auf diese Fläche ist also auch im ersten Falle

$$\int \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma = \int \frac{\partial A}{\partial n}\, d\sigma$$

ein negativer, im zweiten Falle ein positiver Werth. Da nun nach §. 3., wenn Q die Gesammtmasse, welche im jetzigen Falle die Potentialfunction V erzeugt, bedeutet, immer $\int \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma = -4\pi Q$, so folgt, dass der Werth A und damit auch der Werth der Potentialfunction für alle ausserhalb der geschlossenen Niveaufläche $V = A$ gelegenen Punkte immer desselben Vorzeichens ist wie die Gesammtmasse, welche die Potentialfunction V erzeugt. Ist die Gesammtmasse $Q = 0$, so folgt, dass auch $\int \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma = 0$, oder, weil

$\frac{\partial V}{\partial n}$ für alle Punkte der Oberfläche σ dasselbe Vorzeichen besitzt, dass $\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial A}{\partial n}$ selbst gleich Null ist, mithin die Potentialfunction in einer unendlich dünnen Schicht über der Niveaufläche $V = A$ constant bleibt, dann aber muss sie nach dem frühern Satze im ganzen äussern Raume constant, also gleich Null sein und denselben constanten Werth auch im ganzen unendlichen massenfreien Raume behalten, dann aber ist, wie wir oben gesehen haben, nicht allein die Gesammtmasse Q gleich Null, sondern auch die Gesammtmasse eines jeden einzelnen abgegrenzten zugleich mit von der Niveaufläche $V = A$ umschlossenen Raumes.

Setzen wir umgekehrt voraus, dass auf der Niveaufläche $V = A$, $A = 0$ sei, so folgt, aus der bereits bewiesenen Thatsache, dass der Werth von V für irgend einen Punkt ausserhalb der Niveaufläche $V = A$ zwischen 0 und A liegen muss, dass auch im jetzigen Falle V für den ganzen unendlichen äusseren Raume verschwindet, also auch wie vorhin für den ganzen unendlichen massenleeren Raum, und aus diesem Umstande folgt wiederum, dass die Gesammtmassen der einzelnen getrennten massenerfüllten Räume verschwinden müssen.

§. 10.

Fernerweite Eigenschaften der Potentialfunction V, die sich aus der Betrachtung der Niveauflächen $V =$ Const. ergeben.

Am Ende des §. 3. wurde als allgemeines Mittel, die Lage eines Punktes im Raume zu bestimmen, ein System dreier Flächenfamilien mit den als Coordinaten betrachteten Parametern $\varrho_1\ \varrho_2\ \varrho_3$ eingeführt, die sich in dem Punkte, dessen Lage im Raume bestimmt werden sollte, gegenseitig rechtwinklig durchschnitten. Es möge jetzt als die eine jener drei Flächenfamilien die Familie der Niveauflächen der Potentialfunction V, also

$$V = \varrho_1$$

angenommen werden.

Ein berühmtes Theorem von Dupin sagt nun, in jedem

orthogonalen Flächensysteme durchschneiden irgend zwei conjugirte Flächenfamilien die dritte Flächenfamilie in ihren Krümmungslinien.

Ist daher M irgend ein Punkt auf der Niveaufläche $V = \varrho_1$, der ausser ϱ_1 noch die beiden anderen Coordinaten $\varrho_2 = f_2 (x, y, z)$ und $\varrho_3 = f_3 (x, y, z)$ besitzt, so giebt das durch M gehende Element der Durchschnittslinie beider Flächen $f_2 = \varrho_2$ und $f_3 = \varrho_3$ nicht allein das dem Punkte M zugehörige Element der Kraftlinie der Potentialfunction V an, sondern es geben auch die beiden Durchschnittslinien der beiden Flächen $f_2 = \varrho_2$ und $f_3 = \varrho_3$ mit der Niveaufläche $V = \varrho_1$ zugleich die Krümmungslinien der Niveaufläche, welche durch den Punkt M hindurchgehen.

Setzen wir den Ausdruck $V = \varrho_1$ in die Gleichung III §. 3. ein, so erlangt ΔV den einfachen Ausdruck

$$1, \quad \Delta V = \frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial \varrho_1} \frac{P}{N_1}; \quad P = \sqrt{N_1 N_2 N_3}.$$

und N_1, N_2 und N_3 kann einfach erklärt werden durch

$$dn_1 = \sqrt{N_1}\, d\varrho_1 ; \; dn_2 = \sqrt{N_2}\, d\varrho_2 ; \; dn_3 = \sqrt{N_3}\, d\varrho_3,$$

wenn der Reihe nach dn_1, dn_2, dn_3 die Normalelemente auf den Flächen $V = \varrho_1$, $f_2 = \varrho_2$, $f_3 = \varrho_3$ bedeuten.

Da $V = \varrho_1$ zu denken ist als Function der drei Raumcoordinaten xyz, so ist es zunächst nöthig, die Bedingungen zu bestimmen, denen die Function $V = f_1 (x, y, z)$ genügen muss, damit sie als Potentialfunction betrachtet werden könne, die für einen individuellen Werth der in ihr vorkommenden Constanten ϱ_1 eine Niveaufläche bezeichne. Wir setzen zu diesem Zwecke

$$V - \varrho_1 = f_1 (x, y, z, \lambda) = 0$$

und untersuchen nun die Fläche $f_1 (x, y, z, \lambda) = 0$, in welcher λ als Function allein von ϱ_1 zu denken ist, derart, dass die Fläche $f_1 (x, y, z, \lambda') = 0$ für einen bestimmten Werth λ' von λ eine Niveaufläche darstelle.

Ist nun V die Potentialfunction, zu der die Niveauflächen $f_1 (x, y, z, \lambda) = 0$ gehören, so darf sich der Werth von V allein mit λ ändern, während er für dasselbe λ und ein beliebiges x, y oder z, so lange diese Variablen nur der

Gleichung $f_1(x, y, z, \lambda) = 0$ genügen, derselbe bleibt, es ist dann also V allein Function von λ, während λ wiederum als eine Function von x, y und z zu denken ist, die bestimmt wird durch die Gleichung $f_1(x, y, z, \lambda) = 0$. Für den ganzen Raum nun, der ausserhalb des Bereiches liegt, der mit den Massen erfüllt wird, die die Potentialfunction V erzeugen, gilt die Gleichung

$$\varDelta V = 0,$$

oder, da V nur Function von λ ist

$$\varDelta V = \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{\partial V}{\partial \lambda}\left[\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2}\right] = 0.$$

Hieraus folgt:

$$-\frac{\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}}{\frac{\partial V}{\partial \lambda}} = \frac{\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2}}{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2}.$$

In dieser Gleichung ist die linke Seite eine Function von λ allein, folglich muss auch die rechte Seite allein von λ (und durch λ erst vermittels der Gleichung $f_1(x, y, z, \lambda) = 0$ von x, y und z) abhängen. Bezeichnet man dieselbe kurz mit $\varphi(\lambda)$, so folgt noch leicht durch Integration

$$V = C \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} e^{\int \varphi(\lambda)\, d\lambda}\, d\lambda,$$

wenn C eine Integrationsconstante und λ_0 und λ_1 zwei individuelle Werthe von λ bezeichnen.

Aus III, §. 4., folgt für den ganzen äusseren massenleeren Raum, da für diesen $\varDelta V = 0$:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V.\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right) d\sigma.$$

Wir beziehen dieses Integral auf den ganzen äussern massenleeren Raum, den wir uns einmal durch eine Kugelfläche mit unendlich grossem Radius, deren Centrum aber in endlicher Entfernung liegt, begrenzt denken können und

dann durch die Niveaufläche, für welche λ den **Werth** λ_0 habe. Für die erstere Begrenzungsfläche verschwindet das vorige Integral, für die letztere ist V constant gleich V_0, so dass entsteht

$$V_1 = \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V_0 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right) d\sigma.$$

Nun ist noch §. 3.

$$\frac{1}{4\pi}\int V_0 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = \frac{V_0}{4\pi}\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = 0,$$

folglich bleibt

$$V_1 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\frac{\partial V}{\partial n}}{r} \partial \sigma.$$

Nun ist

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial n}.$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial n} = \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial \lambda}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n};$$

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2}},$$

folglich auch

$$\frac{\partial \lambda}{\partial n} = \sqrt{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2};$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial \lambda}\sqrt{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2}$$

und

$$V_1 = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial \lambda}\int \frac{1}{r}\sqrt{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2}\, d\sigma.$$

Denken wir uns in allen Punkten der Niveaufläche Normalen errichtet, von der Länge ∂n proportional mit

$\sqrt{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2}$, so begrenzen die Endpunkte dieser Normalenelemente eine zweite, der Niveaufläche unendlich nahe gelegene Fläche. Den Zwischenraum zwischen diesen beiden einander unendlich nahen Flächen füllen wir mit Masse von der constanten Dichtheit $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial \lambda}$ an und nennen eine solche Massenschicht mit Chasles* Niveauschicht; alsdann können wir, das eben gefundene zusammenfassend, folgendes Theorem aussprechen:

Ist ein System von Flächen repräsentirt durch die Gleichung $f(x, y, z, \lambda) = 0$, so sind diese Flächen Niveauflächen nur unter der Bedingung, dass $\frac{\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2}}{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2}$ eine Function von λ allein ist und dass für einen gewissen Werth von λ die Fläche $f(x, y, z, \lambda) = 0$ übergeht in eine Kugelfläche mit unendlich grossem Radius, deren Centrum aber in endlicher Entfernung liegt. Diese Niveauflächen können alsdann betrachtet werden als zugehörig zu der Potentialfunction, die herkommt von der auf der innersten Niveaufläche angebrachten Niveauschicht.

Wir untersuchen weiter, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit das durch die Gleichung

$$f(x, y, z, \lambda, h) = 0$$

repräsentirte System von Niveauflächen die einzelnen Niveauflächen dadurch bestimme, dass dem λ ein bestimmter individueller Werth zukomme und dass die beiden Flächen $f(x, y, z, \lambda, h) = 0$ und $f(x, y, z, \lambda, h + dh) = 0$ eine Niveauschicht einschliesse. Offenbar ist die letztere Forderung erfüllt, wenn die zwischen den beiden eben genannten Flächen liegenden Normalenelemente ∂n proportial sind dem Werthe $\sqrt{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2}$.

*) Vergl. Cap. III. §. 1.

Ist $x\,y\,z$ irgend ein Punkt der Fläche $f(x, y, z, \lambda, h) = 0$, in welchem das Normalenelement ∂n errichtet ist, das die Fläche $f(x, y, z, \lambda, h + dh) = 0$ im Punkte $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ trifft, so ist, gemäss der bekannten Ausdrücke für die Neigung der Normalen

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}};$$

$$\frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

Da ferner der Punkt $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ der Fläche $f(x, y, z, \lambda, h + dh) = 0$ angehörte, so gilt auch

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial h} dh = 0.$$

Setzen wir in diese Gleichung die aus den vorigen Gleichungen folgenden Werthe für $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ ein und beachten, dass $dx^2 + dy^2 + dz^2 = dn^2$, so ergiebt sich

$$dn\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} + \frac{\partial f}{\partial h} dh = 0.$$

Dagegen folgen aus der Niveaufläche $f(x, y, z, \lambda, h) = 0$ die Gleichungen

$$\text{a,}\quad \frac{\partial f}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x};\quad \frac{\partial f}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y};\quad \frac{\partial f}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial z}$$

aus denen sich ergiebt:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)^2 \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2\right].$$

Aus dieser Gleichung folgt aber, wenn sie mit der vorigen das Normalenelement dn bestimmenden verbunden wird:

$$\frac{dn}{\sqrt{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2}} = \pm \frac{\frac{\partial f}{\partial \lambda}\frac{\partial f}{\partial h}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} dh.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber nach der oben ausgesprochenen Bedingung dafür, dass die beiden behandelten Flächen eine Niveauschicht einschliessen sollen, eine Constante, folglich muss auch die rechte Seite eine solche sein, wir setzen desswegen:

$$\text{b,}\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = \theta(h)\frac{\partial f}{\partial \lambda}\frac{\partial f}{\partial h},$$

in welcher Gleichung $\theta(h)$ eine beliebige Function von h allein bedeuten soll.

Ausser dieser eben erhaltenen Bedingungsgleichung gilt nun natürlich auch noch die obige dafür, dass $f(x, y, z, \lambda) = 0$ eine Niveaufläche sei, nämlich

$$\text{c,}\qquad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} = \varphi(\lambda)\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2\right],$$

wenn $\varphi(\lambda)$ eine Function nur von λ bezeichnet.

Differentiiren wir die erste der Gleichungen a, noch x, so entsteht:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \lambda}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} = 0,$$

welche Gleichung, mit $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ multiplicirt und mit der ersten der Gleichungen a, verglichen die Form annimmt:

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial \lambda} + \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2}\frac{\partial f}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)^2\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} = 0.$$

Zu dieser Gleichung lassen sich noch zwei andere analoge aufstellen, die aus den beiden andern Gleichungen a, durch Differentiation nach y und z entstehen. Addirt man alle drei Gleichungen, so erhält man:

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right] - \frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2\right]$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial \lambda}\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2}\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2\right]$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)^2\left[\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2}\right] = 0.$$

Ersetzt man $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2}$ durch den Werth, wie er sich aus c, ergiebt, so entsteht:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+\frac{\varphi(\lambda)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]}{\frac{\partial f}{\partial \lambda}}$$

$$-\frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial \lambda}}\right]=0.$$

und hieraus folgt endlich mit Hülfe der Gleichung b,

$$\text{d,}\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+\theta(h)\,\varphi(\lambda)\frac{\partial f}{\partial h}-\theta(h)\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda\,\partial h}=0.$$

Die Gleichungen b, und d, enthalten die Antwort auf die Eingangs dieser Betrachtung gestellte Frage.

Wenden wir die Gleichungen b, und d, an auf den Fall, wo $f(x, y, z, \lambda, h)=0$ die Form hat

$$f=F-\psi(h)=0,$$

und F unabhängig von h ist.

In diesem Falle ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial h\,\partial \lambda}=0;\ \frac{\partial f}{\partial h}=-\psi'(h);\ \frac{\partial f}{\partial \lambda}=\frac{\partial F}{\partial \lambda}$$

und wenn wir setzen

$$-H=\theta(h)\,\psi'(h),$$

so geben die Gleichungen b, und d, für diesen Fall

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2=-H\frac{\partial F}{\partial \lambda}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=H\varphi(\lambda).$$

Wir sprechen das hierin liegende Resultat in dem Satze aus:

Soll die Potentialfunction einer homogenen Massenschicht, die enthalten ist zwischen zwei Flächen des Systemes

$$F(x, y, z, \lambda)-\psi(h)=0$$

und entsteht, indem man dem h zwei unendlich wenig verschiedene Werthe beilegt, zu Niveauflächen im ganzen äusseren Raume die Flächen haben

$$F(x, y, z, \lambda)-\psi(h)=0,$$

die aus dieser Gleichung entstehen, indem man dem λ gewisse individuelle Werthe beilegt, so ist nöthig und ausreichend, dass die beiden Gleichungen erfüllt seien:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = - H \frac{\partial F}{\partial \lambda}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = H \varphi (\lambda)$$

in denen H eine übrigens beliebige Function nur von h bedeutet.

Wir gehen nun dazu über, die Krümmungsradien der durch den Punkt M auf der Niveaufläche $V = \varrho_1$ gehenden Krümmungslinien in einer für unser orthogonales Coordinatensystem möglichst einfachen Form darzustellen. Es seien zu diesem Zwecke R_2 und R_3 die dem Punkt M angehörigen Krümmungsradien und zwar so, dass R_2 angehört der Durchschnittslinie der Flächen $V = \varrho_1$ und $f_2 = \varrho_2$, R_3 der Flächen $V = \varrho_1$ und $f_3 = \varrho_3$. Wir rechnen ferner R_2 oder R_3 als positiv, wenn das zugehörige Krümmungscentrum auf derselben Seite der Fläche $V = \varrho$ liegt, nach welcher auch die Normalen dieser Fläche als positiv gerechnet werden. Besitzt nun M die gewöhnlichen rechtwinkligen räumlichen Coordinaten $x\, y\, z$, das Krümmungscentrum von R_2 die Coordinaten $x'\, y'\, z'$, so sind die Cosinus der Winkel, welche die in M auf der Fläche $V = \varrho_1$ errichtete Normale mit den Axen der x, y und z bildet, der Reihe nach nach §. 3.

$$\sqrt{N_1}\, \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}, \; \sqrt{N_1}\, \frac{\partial \varrho_1}{\partial y}, \; \sqrt{N_1}\, \frac{\partial \varrho_1}{\partial z}.$$

Da R_2 ebenfalls in die Richtung der Normale auf der Fläche $V = \varrho$ fällt, so bildet auch R_2 mit den Axen der $x\, y$ und z Winkel, deren Cosinus der Reihe nach mit den eben genannten übereinstimmen müssen. Die Projectionen von R_2 auf jene Coordinatenaxen sind aber der Reihe nach: $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$, folglich die Werthe der Cosinus auch: $\frac{x' - x}{\pm R_2}, \frac{y' - y}{\pm R_2}, \frac{z' - z}{\pm R_2}$, wobei der Nenner das doppelte Vorzeichen $(\pm)$ besitzt, weil auch R_2 ein gleiches je nach der Lage des Krümmungscentrums zukommt.

Nun ist R_2 nach derselben Richtung als positiv zu

rechnen, nach welcher auch $\partial \varrho_1$ positiv ist. Es lassen sich also die genannten Werthe der Cosinus einander ohne weiteres gleich setzen, wenn dem R_2 das positive Vorzeichen gegeben wird, wonach die Gleichungen entstehen:

$$2, \quad \frac{\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}}{x'-x} = \frac{\frac{\partial \varrho_1}{\partial y}}{y'-y} = \frac{\frac{\partial \varrho_1}{\partial z}}{z'-z} = \frac{1}{\sqrt{N_1}\, R_2}.$$

Eine analoge Gleichung mit demselben $x'\, y'\, z'$ und R_2 muss auch gelten für einen Punkt M_1, der, gelegen auf der zu R_2 gehörigen Krümmungslinie der Fläche $V = \varrho$, dem Punkte M unendlich nahe ist. Mit andern Worten, man kann die Gleichungen 2, nach dem Bogenelement MM_1 differentiiren, indem man x', y', z' und R_2 wie Constanten behandelt. Bezeichnen wir eine solche Differentiation durch δ und führen wir dieselbe zugleich logarithmisch aus, so entstehen die neuen Gleichungen

$$3, \quad \begin{aligned}
\frac{\delta \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}}{\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}} + \frac{\delta x}{x'-x} + \frac{\delta \sqrt{N_1}}{\sqrt{N_1}} &= 0 \\
\frac{\delta \frac{\partial \varrho_1}{\partial y}}{\frac{\partial \varrho_1}{\partial y}} + \frac{\delta y}{y'-y} + \frac{\delta \sqrt{N_1}}{\sqrt{N_1}} &= 0 \\
\frac{\delta \frac{\partial \varrho_1}{\partial z}}{\frac{\partial \varrho_1}{\partial z}} + \frac{\delta z}{z'-z} + \frac{\delta \sqrt{N_1}}{\sqrt{N_1}} &= 0.
\end{aligned}$$

Aus den Gleichungen 3, und 2, folgen aber die neuen Gleichungen:

$$4, \quad \begin{aligned}
\delta \frac{\partial \varrho_1}{\partial x} + \frac{\delta x}{\sqrt{N_1}\, R_2} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial x} \frac{\delta \sqrt{N_1}}{\sqrt{N_1}} &= 0 \\
\delta \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} + \frac{\delta y}{\sqrt{N_1}\, R_2} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} \frac{\delta \sqrt{N_1}}{\sqrt{N_1}} &= 0 \\
\delta \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} + \frac{\delta z}{\sqrt{N_1}\, R_2} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} \frac{\delta \sqrt{N_1}}{\sqrt{N_1}} &= 0
\end{aligned}$$

welche nun nicht mehr die Coordinaten des Krümmungscentrums von R_2 enthalten.

Nach dem Sinn der durch δ angedeuteten Differentiation ist aber

$$\delta \sqrt{N_1} = \frac{\partial \sqrt{N_1}}{\sqrt{N_2}\,\partial \varrho_2} \cdot \sqrt{N_2}\, d\varrho_2 = \frac{\partial \sqrt{N_1}}{\partial \varrho_2}\, d\varrho_2$$

Analog ist auch $\delta \frac{\partial \varrho_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\right) d\varrho_2.$

$$\delta \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial y}\right) d\varrho_2.$$

$$\delta \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial z}\right) d\varrho_2.$$

und

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial \varrho_2}\, d\varrho_2;\ \delta y = \frac{\partial y}{\partial \varrho_2}\, d\varrho_2;\ \delta z = \frac{\partial z}{\partial \varrho_2}\, d\varrho_2.$$

Da ferner ∂x, ∂y und ∂z aufgefasst werden können als die Projectionen des Normalenelementes $\sqrt{N_2}\, d\varrho_2$ auf die Axen der $x\,y$ und z, so ist auch

$$\frac{\partial x}{\sqrt{N_2}\,\partial \varrho_2} = \sqrt{N_2}\,\frac{\partial \varrho_2}{\partial x};\ \frac{\partial y}{\sqrt{N_2}\,\partial \varrho_2} = \sqrt{N_2}\,\frac{\partial \varrho_2}{\partial y};\ \frac{\partial z}{\sqrt{N_2}\,\partial \varrho_2} = \sqrt{N_2}\,\frac{\partial \varrho_2}{\partial z}.$$

Demnach können die letzteren Werthe von δx, δy und δz auch geschrieben werden in der Form

$$\delta x = N_2\,\frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\, d\varrho_2;\ \delta y = N_2\,\frac{\partial \varrho_2}{\partial y}\, d\varrho_2;\ \delta z = N_2\,\frac{\partial \varrho_2}{\partial z}\, d\varrho_2.$$

Bezeichnet nun u irgend eine der drei Coordinaten x oder y oder z, so können die Gleichungen 4, durch Einführung der eben erlangten bei der Differentiation nach δ entstehenden Werthe einfach geschrieben werden in der Form:

$$5,\quad \sqrt{N_1}\,\frac{\partial \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}}{\partial \varrho_2} = -\frac{\partial \varrho}{\partial u}\,\frac{\partial \sqrt{N_1}}{\partial \varrho_2} - \frac{N_2}{R_2}\,\frac{\partial \varrho_2}{\partial u}$$

Andererseits hat man, wenn man sich aus den drei Gleichungen $V = \varrho_1$; $f_2(x, y, z) = \varrho_2$; und $f_3(x, y, z) = \varrho_3$ $x\,y$ und z als Functionen von ϱ_1, ϱ_2 und ϱ_3 ermittelt denkt

$$\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial \varrho_1}}{\partial \varrho_2} = \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial \varrho_2}}{\partial \varrho_1}.$$

Oder

$$\frac{\partial N_1 \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}}{\partial \varrho_2} = \frac{\partial N_2 \frac{\partial \varrho_2}{\partial u}}{\partial \varrho_1}.$$

Führt man die Differentiation aus, so entsteht:

$$6, \qquad N_1 \frac{\partial \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}}{\partial \varrho_2} - N_2 \frac{\partial \frac{\partial \varrho_2}{\partial u}}{\partial \varrho_1} = \frac{\partial \varrho_2}{\partial u} \frac{\partial N_2}{\partial \varrho_1} - \frac{\partial \varrho_1}{\partial u} \frac{\partial N_1}{\partial \varrho_2}.$$

Um aus der Gleichung 6, $\frac{\partial \frac{\partial \varrho_2}{\partial u}}{\partial \varrho_1}$ eliminiren zu können, benutzen wir die die Orthogonalität der Flächen $V = \varrho_1$ und $f_2 = \varrho_2$ bedingende Gleichung

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial x} \frac{\partial \varrho_2}{\partial x} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} = 0.$$

Bedeutet u oder v eine der drei Variablen x, y oder z und l einen der Indexe 1 oder 2, so ist bekanntlich

$$\frac{\partial \frac{\partial \varrho_l}{\partial v}}{\partial u} = \frac{\partial \frac{\partial \varrho_l}{\partial u}}{\partial v}$$

Differentiiren wir also die vorige Gleichung nach u, so kommt:

$$\frac{\partial \varrho_2}{\partial x} \frac{\partial \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}}{\partial x} + \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} \frac{\partial \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}}{\partial y} + \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} \frac{\partial \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}}{\partial z} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial x} \frac{\partial \frac{\partial \varrho_2}{\partial u}}{\partial x}$$

$$+ \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} \frac{\partial \frac{\partial \varrho_2}{\partial u}}{\partial y} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} \frac{\partial \frac{\partial \varrho_2}{\partial u}}{\partial z} = 0,$$

oder, weil $\frac{\partial \varrho_1}{\partial u} = \frac{1}{N_1} \frac{\partial u}{\partial \varrho_1}$, $\frac{\partial \varrho_2}{\partial u} = \frac{1}{N_2} \frac{\partial u}{\partial \varrho_2}$,

$$\frac{1}{N_2} \left(\frac{\partial \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varrho_2} + \frac{\partial \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varrho_2} + \frac{\partial \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \varrho_2} \right)$$

$$+ \frac{1}{N_1} \left(\frac{\partial \frac{\partial \varrho_2}{\partial u}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial \frac{\partial \varrho_2}{\partial u}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial \frac{\partial \varrho_2}{\partial u}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \varrho_1} \right)$$

$$= \frac{1}{N_2} \frac{\partial \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}}{\partial \varrho_2} + \frac{1}{N_1} \frac{\partial \frac{\partial \varrho_2}{\partial u}}{\partial \varrho_1} = 0.$$

Somit entsteht noch die Gleichung

$$7, \qquad N_1 \frac{\partial \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}}{\partial \varrho_2} + N_2 \frac{\partial \frac{\partial \varrho_2}{\partial u}}{\partial \varrho_1} = 0.$$

Durch Addition der Gleichungen 6, und 7, entsteht nun

$$2\,N_1 \frac{\partial \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}}{\partial \varrho_2} = \frac{\partial \varrho_2}{\partial u}\frac{\partial N_2}{\partial \varrho_1} - \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\frac{\partial N_1}{\partial \varrho_2}$$

oder

$$8,\qquad \sqrt{N_1}\frac{\partial \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}}{\partial \varrho_2} = \frac{\sqrt{N_2}}{\sqrt{N_1}}\frac{\partial \varrho_2}{\partial u}\frac{\partial \sqrt{N_2}}{\partial \varrho_1} - \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\frac{\partial \sqrt{N_1}}{\partial \varrho_2}$$

Die beiden Gleichungen 5, und 8, ergeben nun sofort:

$$9,\qquad \frac{1}{R_2} = -\frac{1}{\sqrt{N_1}\,N_2}\frac{\partial \sqrt{N_2}}{\partial \varrho_1} = -\frac{\partial\, l \sqrt{N_2}}{\sqrt{N_1}\,\partial \varrho_1}$$

In analoger Weise muss sich ergeben

$$10,\qquad \frac{1}{R_3} = -\frac{1}{\sqrt{N_1}\,N_3}\frac{\partial \sqrt{N_3}}{\partial \varrho_1} = -\frac{\partial\, l \sqrt{N_3}}{\sqrt{N_1}\,d \varrho_1}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt noch

$$\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = -\frac{1}{\sqrt{N_1}}\frac{\partial\, l \sqrt{N_2 N_3}}{\partial \varrho_1}$$

oder, wenn wir das Normalenelement der Niveaufläche $V = \varrho_1$ kurz mit ∂n bezeichnen

$$11,\qquad \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = -\frac{\partial\, l \sqrt{N_2 N_3}}{\partial n}.$$

Der Gleichung 1, lassen sich nun mehrere wichtige Umformungen geben. Es folgt zunächst

$$P \varDelta V = \frac{\partial}{\partial \varrho_1}\sqrt{\frac{N_2 N_3}{N_1}},$$

oder, weil $d\varrho_2$ und $d\varrho_3$ unabhängig von ϱ_1 sind, also die letzte Gleichung auch geschrieben werden kann

$$P \varDelta V\, d\varrho_2\, d\varrho_3 = \frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{\sqrt{N_2 N_3}\; d\varrho_2\, d\varrho_3}{\sqrt{N_1}}\right)$$

Nun ist $\frac{1}{\sqrt{N_1}} = \frac{\partial V}{\partial n}$ das Gefälle im Punkte $\varrho_1\,\varrho_2\,\varrho_3$ und $\sqrt{N_2\; N_3}\, d\varrho_2\, d\varrho_3 = d\sigma$ das zum Gefälle $\frac{\partial V}{\partial n}$ gehörige Flächenelement. Wir können daher die vorige Gleichung auch schreiben in der Form:

$$P \varDelta V\; d\varrho_2\; d\varrho_3 = \frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma\right)$$

Ist nun die Niveaufläche $V = \varrho$ so gelegen, dass weder auf ihr noch ihr unendlich nahe Theile der Massen liegen, die die Potentialfunction V erzeugen, so ist $\varDelta V = 0$, folglich auch

$$\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{\partial V}{\partial n} d\sigma\right) = 0 \text{ oder}$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = \varphi(\varrho_2, \varrho_3).$$

Denken wir uns das Flächenelement $d\sigma$ belegt mit Masse von der constanten Dichtheit $+1$ (diese Masse jedoch so verstanden, dass sie nicht mit Theil nimmt an der Erzeugung von V), so drückt das Product $-\frac{\partial V}{\partial n} d\sigma$ aus die Kraft, die von den die Potentialfunction V erzeugenden Massen ausgeübt wird auf die auf dem Flächenelement $d\sigma$ befindliche Masse. Nennen wir diese Kraft die **treibende Kraft**, so ergiebt die letzte Gleichung den Satz:

Für jede Niveaufläche, die nicht durch massenerfüllte Räume selbst oder denselben unendlich nahe kommend gelegt ist, besitzt die treibende Kraft einen vom Parameter der Niveaufläche unabhängigen Werth.

Geben wir ferner der Gleichung 1, die Form:

$$P \varDelta V = \frac{\partial}{\partial n} \sqrt{\frac{N_2 N_3}{N_1}} \cdot \sqrt{N_1} = \sqrt{N_1} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial V}{\partial n} \sqrt{N_2 N_3}\right)$$

so ergiebt sich nach Ausführung der Differentiation

$$\varDelta V = \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} + \frac{\partial l \sqrt{N_2 N_3}}{\partial n} \cdot \frac{\partial V}{\partial n}.$$

Oder, wenn wir die Gleichung 11, benützen:

$$12^*, \qquad \varDelta V = \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} - \frac{\partial V}{\partial n}\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

Ist wiederum, wie vorhin, $\varDelta V = 0$, so folgt durch Integration der übrig bleibenden Differentialgleichung:

$$12, \qquad \frac{\partial V}{\partial n} = a\, e^{\int \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) dn},$$

wenn a die Integrationsconstante bezeichnet.

Die Gleichung 12, kann betrachtet werden als Differentialgleichung der Kraftlinie. Da ferner das Vorzeichen der

rechten Seite der Gleichung 12, unabhängig ist vom Vorzeichen der beiden Hauptkrümmungsradien R_2 und R_3, so erhalten wir den Satz:

Längs einer Kraftlinie besitzt das Gefälle allenthalben einerlei Richtung, so lange nicht die zugehörige Niveaufläche durch massenerfüllte Räume selbst oder unendlich nahe an denselben vorbeigeht, und diese Massen zugleich mit die Potentialfunction V erzeugen.

Nach dem, was im vorigen Paragraphen über den Verlauf der Potentialfunction gesagt worden ist, wissen wir, dass, wenn für die Niveaufläche, welche den die Potentialfunction V erzeugenden Massen am nächsten aber nicht unendlich nahe kommt, $V = A$ ist, $\frac{\partial V}{\partial n}$ ein positiver oder negativer Werth sein muss, je nachdem A ein negativer oder positiver Werth ist, dasselbe Vorzeichen, welches der Werth von $\frac{\partial V}{\partial n}$ besitzt, kommt aber auch der Integrationsconstanten a zu.

Setzen wir $a = b.\, c$, wo $c = e^{-\int\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right) dn}$, wenn nach ausgeführter Integration für ϱ_1 der Werth gesetzt wird, der der unendlich entfernten Niveaufläche entspricht, was wir einfach durch die Marke (∞) andeuten wollen, so nimmt die Gleichung 12, die Form an

$$13,\qquad \frac{\partial V}{\partial n} = b\, e^{\int_\infty^{\varrho_1}\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right) dn}.$$

Nun folgt aus der Gleichung 1, wenn, wie in unserem Fall, $\varDelta V = 0$

$$\frac{\partial}{\partial \varrho_1} \sqrt{\frac{N_2 N_3}{N_1}} = 0$$

also auch

$$\frac{\partial l \sqrt{N_2 N_3}}{\partial n} = \frac{\partial l \sqrt{N_1}}{\partial n}$$

oder nach Gleichung 11,

$$14,\qquad \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = -\frac{\partial l \sqrt{N_1}}{\partial n}.$$

Substituirt man den Werth der rechten Seite dieser

Gleichung in 13, so lässt sich die Integration ohne weiteres ausführen und ergiebt

$$\frac{\partial V}{\partial n} = b \frac{(\sqrt{N_1})_\infty}{\sqrt{N_1}},$$

oder, weil $\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{N_1}}$, also auch $(\sqrt{N_1})_\infty = \frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_\infty}$,

wenn wir mit $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_\infty$ das Gefälle der unendlich entfernten Niveaufläche bezeichnen,

$$1 = b \cdot \frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_\infty}.$$

Substituiren wir den hieraus sich ergebenden Werth für b in die Gleichung 13, so entsteht endlich

$$15, \quad \frac{\partial V}{\partial n} = \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_\infty e^{-\int_{\varrho_1}^{\infty}\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) dn}.$$

Die Gleichung 15, zeigt, dass im Allgemeinen das Gefälle an denjenigen Stellen einer Niveaufläche am grössten ist, welche die stärkste negative (nach aussen convexe) Krümmung besitzen, am kleinsten an denjenigen, welche die stärkste positive (nach innen convexe) Krümmung haben. Besonders stark muss also im Allgemeinen das Gefälle auf scharfen nach aussen gerichteten Kanten oder Spitzen sein, während das entgegengesetzte gilt für scharf eingebogene Spitzen oder Kanten. Im Allgemeinen werden die nach aussen convexen Stellen einer geschlossenen Niveaufläche ein stärkeres Gefälle besitzen, als die übrigen Stellen derselben.

Substituirt man den Werth von $\frac{\partial V}{\partial n}$ aus Gleichung 15, in die Gleichung 12*, und beachtet man, dass gemäss den Resultaten des vorigen Paragraphen der absolute Werth von V ein stetig abnehmender ist, also dessen nach der nach aussen gerichteten Normale genommener Differentialquotient immer mit negativem Vorzeichen zu denken ist, so erkennt man, dass das vorhin über das Gefälle Bemerkte in noch stärkerem Maasse für die Abnahme des Gefälles gilt, wenn man auf der Kraftlinie von einer Niveaufläche aus nach aussen hin fortschreitet.

§. 11.
Die äquivalente Massentransposition.

Wir verstehen unter äquivalenter Massentransposition eine von der gegebenen Massenanordnung verschiedene Massenvertheilung, derart, dass die Wirkungen beider auf Punkte innerhalb gegebener Räume gleich sind.

Es sei S irgend eine geschlossene Fläche, innerhalb deren Massen beliebig vertheilt sind; es ist die Frage, wie kann die Anordnung dieser innerhalb S gelegenen Massen geändert werden, ohne dass sich auf und im ganzen Raume ausserhalb S die Potentialfunction ändert.

Um diese Frage zu beantworten, benützen wir den in §. 4. erlangten Satz: „Eine Hohlkugel, deren Massendichtheit nur eine Function des Radius ist, wirkt auf einen ausserhalb der Hohlkugel gelegenen Punkt gerade so, als ob die Gesammtmasse der Hohlkugel in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.“

Es muss hiernach auch umgekehrt erlaubt sein, eine im Mittelpunkte einer Kugel gegebene Masse zu ersetzen durch eine Massenvertheilung über den Raum der Hohlkugel, ohne dass sich die Wirkung der substituirten Massenvertheilung für irgend einen Punkt ausserhalb der Kugel unterscheidet von der der gegebenen Massenvertheilung, wenn in der substituirten Massenvertheilung die Massendichtheit derselben unendlich dünnen concentrischen Schicht constant ist und die Gesammtmasse der neuen Vertheilung übereinstimmt mit der im Kugelmittelpunkt gegebenen Masse. Speciell also auch können wir die im Kugelmittelpunkte gegebene Masse ersetzen durch eine unendlich dünne Massenschicht, die in gleichförmiger Dichtheit über die Kugelfläche verbreitet ist.

Es sei nun S' eine zweite geschlossene Fläche, die ganz innerhalb der gegebenen S liegt. Wir beschreiben um jedes innerhalb S' gelegene mit Masse versehene Raumelement als Mittelpunkt eine Kugel, die in möglichst vielen Punkten die Fläche S' berührt und verlegen nun nach dem eben genannten Gesetze die in den einzelnen Kugelmittelpunkten gelegenen Massen auf die Kugeloberflächen.

Wir erhalten so eine neue Massenvertheilung, die für alle Punkte ausserhalb S' der gegebenen äquivalent ist und deren Gesammtmasse mit der gegebenen übereinstimmt. Die neue Massenvertheilung unterscheidet sich aber von der gegebenen dadurch, dass auf die Fläche S' Massen aus dem Innern transportirt sind, die insgesammt einen endlichen Bruchtheil der früher innerhalb S' gelegenen ausmachen. Mit den jetzt noch innerhalb S' gelegenen Massen, die herkommen von Massenbelegungen derjenigen Kugelflächentheile, die nicht die Fläche S' berühren, verfahren wir nun gerade so, wie vorher mit den innerhalb S' gegebenen Massen. Wiederum ist ein endlicher Bruchtheil der vorher noch innerhalb des von S' umschlossenen Raumes gelegenen Massen auf S' transportirt worden. Wir können uns das genannte Verfahren beliebig oft wiederholt denken, so oft, dass alle innerhalb S' gegebene Massen in Form einer unendlich dünnen Schicht allein über S' verbreitet sind, oder mit andern Worten, bis die gesammte innerhalb des von S' umschlossenen Raumes noch vorhandene Gesammtmasse kleiner ist als irgend eine gegebene noch so kleine Grösse δ.

Ein gleiches Verfahren können wir auch auf die Massen anwenden, die zwischen S' und S gelegen sind. Wir können diese Massen ersetzen durch eine Vertheilung der zwischen S' und S gegebenen Gesammtmasse in einer unendlich dünnen Schicht über S' und S allein, derart, dass die neue Vertheilung für jeden Punkt innerhalb des von S' oder ausserhalb des von S umschlossenen Raumes der gegebenen Massenvertheilung äquivalent ist.

Da der Gang der von uns gemachten Massentransposition allenthalben ein streng bestimmter war, so muss auch das Endresultat der Massentransposition ein unzweideutig bestimmtes sein. Gesetzt nun, es sei überhaupt möglich, auf einem andern Wege der äquivalenten Massentransposition noch eine zweite Massenvertheilung auf der Fläche S' im ersten Falle, oder auf S' und S im zweiten Falle zu erzielen, die ebenfalls wie die bereits erlangte der gegebenen Massenvertheilung äquivalent ist. Es sei immer V die Potentialfunction der bereits erlangten äquivalenten Massentransposition, U die der noch als möglich angenommenen. Dann

ist im ersteren Falle für alle Punkte auf und ausserhalb S' $V - U = 0$, im zweiten Falle für alle Punkte innerhalb des von S' und ausserhalb des von S umschlossenen Raumes ebenfalls $V - U = 0$. Für beide Fälle ist demnach das im Sinne der Gleichung I, §. 6. genommene $\left(\frac{\partial(V-U)}{\partial n}\right)_{+0}$ gleich Null. Nach §. 9. muss aber unter den jetzt vorhandenen Bedingungen auch $V - U = 0$ sein für alle Punkte des von S' umschlossenen Raumes im ersten Falle, und des von S' und S umschlossenen im zweiten. Es verschwindet also auch $\left(\frac{\partial(V-U)}{\partial n}\right)_{-0}$. Nach der Gleichung I, §. 6. verschwindet nun auch die Dichtheit ϱ der die Potentialfunction $V - U$ bewirkenden, auf der Oberfläche S' im ersten, S' und S im zweiten Falle gelegenen Massen. Es ist also auch die Dichtheit der die Potentialfunction V bewirkenden Masse dieselbe, wie die der die Potentialfunction U bewirkenden. Diess heisst aber nichts anderes, als dass die oben als noch vorhanden angenommene zweite äquivalente Massentransposition identisch ist mit der ersten oder dass es nur ein einziges Endresultat der genannten äquivalenten Massentransposition geben kann.

Denken wir uns die Fläche S als eine Kugel, deren Radius wir ins Unbegrenzte wachsen lassen können, so ist, wenn wir den Radius derselben unendlich gross werden lassen, die Potentialfunction der auf der Kugeloberfläche durch Transposition befindlichen Masse für alle Punkte des von der Fläche S' umschlossenen und durchgängig in endlichen Entfernungen gelegenen Raumes eine constante Grösse.

Die durch die Betrachtungen dieses Paragraphen gewonnenen Resultate sprechen wir nun in folgenden Lehrsätzen aus:

a) Die in einer durch zwei Flächen S und S' gebildeten Schale eingeschlossenen Massen lassen sich stets und nur auf eine einzige Weise äquivalent für alle Punkte des Raumes, der nicht der Schale selbst angehört, auf die Flächen S und S' selbst transponiren.

Lassen wir in den ersten Betrachtungen dieses Para-

graphen die Fläche S' mit der Fläche S zusammenfallen, so erhalten wir ferner:

b) **Massen, die von einer Fläche S umschlossen werden, lassen sich immer und nur auf eine einzige Weise äquivalent für alle Punkte des äussern Raumes und der Fläche S auf die Fläche S transponiren.**

Lassen wir endlich in der obigen Betrachtung die äussere Fläche S in eine Kugelfläche mit unendlich grossem Radius übergehen, so erhalten wir noch

c) **Anstatt einer beliebig gegebenen Massenvertheilung, die bloss ausserhalb des von einer geschlossenen Fläche S' begrenzten Raumes vorhanden ist, lässt sich eine Massenvertheilung bloss auf der Fläche S' selbst angeben mit dem Erfolge, dass die Potentialfunctionen der gegebenen und der substituirten Massenvertheilung sich nur um eine constante Grösse unterscheiden für alle Punkte, die entweder auf S' selbst oder innerhalb des von dieser Fläche umschlossenen Raumes liegen.**

Es sei wiederum S eine geschlossene Fläche, über welche Massen in unendlich dünner Schicht ausgebreitet sind. Wir legen, die Möglichkeit vorausgesetzt, durch jedes mit Masse versehene Oberflächenelement der Fläche S eine Kugel derart, dass diese Kugel übrigens ganz im Innern des von S umschlossenen Raumes gelegen ist und ihre Oberfläche nirgends weiter als an der genannten Stelle der Oberfläche S unendlich nahe kommt. Wir überdecken diese Kugelflächen allenthalben mit einer unendlich dünnen Massenschicht von constanter Dichtheit, die dieselbe ist, wie auf der Fläche S in dem Punkte, wo die Berührung mit der entsprechenden Kugel statt findet. Ueber jede einzelne Kugel werde ferner eine unendlich dünne Massenschicht von derselben constanten Dichtheit, wie die vorige, allein entgegengesetzten Vorzeichens, ausgebreitet; jedoch so, dass die Berührungsstellen zwischen der Fläche S und den angenommenen Kugeln von

dieser zweiten Massenbelegung frei bleiben. Durch alle neu angenommenen Massen ist in Wirklichkeit keine Aenderung in der ursprünglich gegebenen Massenvertheilung herbeigeführt worden, es müssen also auch die neuen Massen auf alle Punkte des Raumes ganz dieselbe Wirkung haben, wie die gegebenen. Nach dem am Eingange dieses Paragraphen genannten Satze können wir aber die erste der angenommenen Massenvertheilungen ersetzen durch die erste Gesammtmasse jeder einzelnen Kugelfläche, gelegen in deren Mittelpunkte. Dabei muss die neue Massenvertheilung für alle Punkte auf und ausserhalb der Fläche S ganz dieselbe Wirkung haben wie die ursprünglich gegebene Massenvertheilung. Die neue Massenvertheilung besitzt aber gegen die gegebene den wesentlichen Unterschied, dass bei ihr eine unendlich dünne Schicht des Raumes, der nach aussen von der Fläche S begrenzt ist, jetzt ganz massenfrei ist. Auf den jetzt noch mit Masse versehenen Raum wenden wir wiederum das genannte Verfahren an und denken uns dasselbe beliebig oft wiederholt. Die oben vorausgesetzte Möglichkeit der Anwendbarkeit des eben genannten Verfahrens hängt nun nur davon ab, dass man eine Kugel construiren könne, die die, den mit Masse versehenen Raum begrenzende, Fläche berührt, und sonst ganz innerhalb des von jener Fläche umschlossenen Raumes liegt, diess ist aber nichts anderes als die Bedingung, dass jene Fläche keine unendlich grosse negative Krümmung besitzen darf. Es kann also auch das genannte Verfahren der äquivalenten Massentransposition soweit fortgesetzt werden, als es die eben angegebene Bedingung erlaubt, d. h. bis die Massen in unendlich dünner Schicht über Linien oder Flächen vertheilt sind. Das bis jetzt erlangte Resultat sprechen wir in dem Satze aus: Ist die geschlossene und mit Masse in unendlich dünner Schicht belegte Fläche S von der Art, dass sie nirgends eine unendlich grosse negative Krümmung besitzt, so kann man die auf S befindliche Masse ersetzen durch eine für alle Punkte ausserhalb des von S umschlossenen Raumes und auf S selbst äquivalente Masse im Innern des von S umschlossenen Raumes, deren Ge-

sammtsumme übereinstimmt mit der der gegebenen auf S befindlichen.[1])

Die Aufgabe dieser letzteren Art äquivalenter Massentransposition ist unbestimmt, so lange nicht noch nähere Bedingungen gestellt werden über die Räume im Innern des von S umschlossenen Raumes, die mit der äquivalenten Masse angefüllt werden sollen, sie wird ins Besondere bestimmt, sobald eine geschlossene Fläche S_1 innerhalb der Fläche S gegeben ist, die allein mit der äquivalenten Masse belegt werden soll. Gesetzt nämlich, es gäbe auf S_1 zwei Massenbelegungen mit den Dichten ϱ und ϱ_1, die der auf S gegebenen Massenbelegung für alle Punkte des äussern Raumes von S und der Fläche S selbst äquivalent wäre, so müsste die Potentialfunction, die herkommt von den Massen auf S_1, wenn diese die Dichtheiten ϱ und $-\varrho_1$ besitzen, für alle ebengenannten Punkte Null betragen, folglich auch nach §. 9. Capt. I. für alle Punkte, die sich innerhalb der von den Flächen S und S_1 umschlossenen Schale und auf der Fläche S_1 selbst befinden, weil sich innerhalb dieser Schale keine wirksamen Massen befinden sollen. Da aber auch innerhalb der Fläche S_1 keine Massen vorhanden sein sollen, so muss auch für alle Punkte des von S_1 umschlossenen Raumes die Potentialfunction verschwinden, daraus folgt aber, dass die die Potentialfunction bewirkende Masse selbst allenthalben verschwinde oder $\varrho - \varrho_1 = 0$ ist, d. h. dass $\varrho = \varrho_1$. Es giebt also auch, wie behauptet wurde, nur eine einzige Lösung des Problems.

Da es nach der ersten Art der äquivalenten Massentransposition möglich ist, die auf S_1 transponirten Massen wieder rückwärts auf eine S_1 allseitig umschliessende Fläche S_2 äquivalent für alle Punkte auf und ausserhalb S_2 zu transponiren, so leuchtet ein, dass von allen Flächen S_1 diejenige die wichtigste ist, die eine weitere äquivalente Massentransposition nach dem Innern nicht zulässt. Diese Fläche

1) Da der letztere Umstand nicht mehr gilt, wenn man die Massentransposition in analoger Weise äquivalent für den innern Raum von innen nach aussen vornimmt, so kann man schliessen, dass in diesem Falle ein gleiches Verfahren zur Massentransposition fehlerhaft sein würde.

wollen wir fernerhin Cardinalfläche nennen. Aus der oben auseinander gesetzten Art, wie die äquivalente Massentransposition ausgeführt gedacht werden kann, leuchtet ein, dass die Cardinalfläche so beschaffen sein muss, dass sich in ihrem innern Raume keine beliebig kleine Kugel mehr construiren lässt, dass sie also nur bestehen kann aus begrenzten Flächenstücken, Linien und Punkten.

Zur analytischen Lösung des Problemes der äquivalenten Massentransposition leistet der Satz I, §. 6. gute Dienste, nach welchem die Massendichtheit auf einer von scharfen Spitzen und Kanten freien, geschlossenen Fläche sich bestimmt durch die Relation

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0}\right].$$

Ist die auf einen äussern Punkt sich beziehende Potentialfunction, oder kurz die äussere Potentialfunction V_a, die auf einen innern Punkt sich beziehende oder kurz die innere Potentialfunction V_i, so kann die vorige Gleichung auch geschrieben werden:

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial V_a}{\partial n} + \frac{\partial V_i}{\partial n}\right],$$

wenn die Differentiation nach der Normale nach der Seite genommen wird, auf welche sich V_a oder V_i bezieht.

Im erstern Falle der äquivalenten Massentransposition, nämlich von innen nach aussen, ist V_a bekannt, weil es übereinstimmen soll mit der äussern Potentialfunction der zu transponirenden Massen; im zweiten Falle, nämlich der Transposition von aussen nach innen, ist ein Gleiches mit V_i der Fall. Ist nun im ersteren Fall noch die Fläche, auf welche transponirt werden soll, eine Niveaufläche der zu transponirenden Masse, so ist V_a für alle Punkte dieser Fläche constant, und denselben constanten Werth besitzt nach §. 9. auch V_i, es ist also für diesen Fall $\frac{\partial V_i}{\partial n} = 0$, und das Resultat der äquivalenten Massentransposition ist einfach

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V_a}{\partial n},$$

wo V_a, also auch $\frac{\partial V_a}{\partial n}$ ein bekannter Werth ist.

In gleicher Weise kann man die Sätze benützen, die im vorigen Paragraphen über Niveauflächen und Niveauschichten abgeleitet wurden. Beispiele für die äquivalente Massentransposition werden in den späteren Capiteln folgen.

Literatur:

Laplace: Mécanique céleste.

George Green: An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism, Nottigham 1828. Crelle Journal Bnd. 39, 44 und 47.

Gauss: Theoria Attractionis corporum sphaeroid. ellipt. Artikel 6. Crelle Journal 1811.

Gauss: Allgemeine Lehrsätze über die im verkehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte. Resultate des magnetischen Vereins vom Jahre 1839. Journal de M. Liouville. t. VII.

Chasles: Comptes rendus des séances de l'Academie de sc. 1839 1er sem. Additions à la Connaissance des Temps pour 1845.

G. Lamé: Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications. Paris 1859.

A. Beer: Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik. Braunschweig 1865.

E. Betti: Teorica delle forze che agoniscono secondo la legge di Newton, Pisa 1865.

R. Clausius: Die Potentialfunction und das Potential. 2. Auflage. Leipzig 1857.

C. H. C. Grinwis: Wiskundige Theorie der Wrijvings-Electriciteit. Utrecht, J. L. Beijers. 1869.

Capitel II.

Die allgemeinen Bedingungen für das elektrische Gleichgewicht.

§. 1.

Begriffsbestimmungen und Masse.

Jede Theorie einer gewissen Reihe von Naturerscheinungen stützt sich auf gewisse einfachere Erscheinungen, oder auf Hypothesen, aus denen die andern Erscheinungen als nothwendige Folge nachgewiesen werden. Je geringer die Anzahl der Hypothesen ist und je genauer sich jede einzelne Hypothese durch ein direktes Experiment als wahr und richtig hinstellen und beweisen lässt, je einfacher und naturgemässer ferner jede einzelne Hypothese ist, um so mehr hat die Theorie Anspruch auf die richtige Erklärung der erklärten Naturerscheinungen.

Es ist wichtig und für die Entwickelung der Naturwissenschaft von grossem Vortheil, dass jede Theorie genau und übersichtlich ihre Hypothesen und deren experimentelle Stützen angiebt, damit man hieraus, wenn die Theorie in allen ihren einzelnen Folgerungen von der Erfahrung bestätigt wird, umgekehrt wieder rückwärts Schlüsse machen könne, welche aus noch allgemeineren Hypothesen die Hypothesen der bereits durch die Erfahrung bestätigten Theorien erklären, damit man also, so zu sagen, eine Theorie der Theorien bilden könne. Denkt man sich diese Schlüsse rückwärts fortgesetzt so weit als möglich, so kommt man endlich auf eine Theorie aller Naturerscheinungen. Diese Theorie ist das Ziel aller Naturwissenschaft, von dem wir freilich jetzt noch sehr weit entfernt sind.

Wir haben es hier nur mit einer Theorie zu thun, die eine gewisse Reihe elektrischer Erscheinungen erklären soll.

Wir wissen seit Newton, dass irgend zwei ponderable Massen auf einander eine gewisse Kraftäusserung ausüben, deren Grösse das Gravitationsgesetz durch eine bestimmte mathematische Formel darstellen lehrt. Irgend zwei ponderable Massen können aber auch, ohne dass sie selbst eine Veränderung zu erleiden scheinen, in Zustände versetzt werden, so, dass die mathematische Formel, die das Gravitationsgesetz giebt, nicht mehr das wirkliche Mass der Kraftäusserung darstellt, vielmehr diese Kraftäusserung mit ganz anderem Massstabe gemessen werden muss. Die Ursachen dieser dem Gravitationsgesetze zuwiderlaufendeu Kraftäusserungen zwischen zwei ponderablen Massen nennen wir Elektricität oder Magnetismus und zwar Elektricität, wenn die Ursache der genannten abnormen Kraftäusserung minder fest an den einzelnen kleinsten Theilchen oder Molekülen eines (elektrischen) Körpers haftet und mehr oder minder schnell von einem Molekül auf ein benachbartes vollkommen oder theilweise übergehen kann. Körper, welche mit der genannten Ursache behaftet sind, nennen wir elektrisch.

Je nachdem die Elektricität längere oder kürzere Zeit braucht, um einen von den ponderablen Molekülen eines Körpers erfüllten Raum zu durchwandern, je nachdem zerfallen auch alle ponderablen Substanzen in die beiden Klassen der schlechten oder guten Elektricitätsleiter.

Die Kraftäusserung zwischen zwei mit Elektricität geladenen Körpern besteht theils in gegenseitiger Anziehung, theils in gegenseitiger Abstossung und es kann die eine Art sowohl, wie auch die andere Art der Kraftäusserung thätig sein zwischen denselben beiden mit Elektricität geladenen Körpern; hieraus folgt, dass es mindestens zwei verschiedene Arten des elektrischen Zustandes geben muss. Das Experiment hat nur auf zwei verschiedene Arten von Elektricität geführt, von denen die eine unter anderen sich an Glas zeigt, wenn es an wollenem oder seidenem Zeuge gerieben wird, die andere an Harz, Schellack u. s. w., wenn es mit dem gleichen Zeuge gerieben wird. Wir nennen die

erstere Elektricität Glaselektricität, die zweite Harzelektricität. Man erkennt die Gegenwart der einen oder anderen Elektricitätsart durch Verwendung des physikalischen Gesetzes, dass gleichnamige Elektricitäten sich gegenseitig abstossen, ungleichnamige sich gegenseitig anziehen. Ladet man zwei von einander getrennte Elektricitätsleiter mit gleichnamiger Elektricität, bringt hierauf beide geladene Elektricitätsleiter mit einander zur Berührung und trennt sie hierauf wieder von einander, so zeigen sich auch nach der Trennung beide Leiter mit derselben Elektricitätsart behaftet, mit der sie vor der Berührung geladen waren. Ganz anders ist der Erfolg, wenn beide Leiter vor der Berührung mit ungleichnamigen Elektricitäten geladen wurden. Nach wieder erfolgter Trennung beider Leiter findet man nämlich beide mit derselben Elektricitätsart geladen oder auch ganz frei von Elektricität und es kann der letztere Erfolg immer erzielt werden, wenn man das Experiment genugsam wiederholt, nachdem man jedesmal dem einen Leiter noch eine gewisse Ladung ungleichnamiger Elektricität mitgetheilt hat als die ist, die er nach Ausführung des vorhergehenden Experimentes besass. Die beiden ungleichnamigen Elektricitäten vernichten sich also gegenseitig, wenn sie sich in demselben von einem Leiter erfüllten Raume befinden.

Misst man daher nach irgend einem zweckmässigen Masse die eine der beiden Elektricitäten, z. B. die Glaselektricität, und wählt man für die andere Elektricität, also für die Harzelektricität, das Mass so, dass beiden Elektricitätsarten dann derselbe numerische Werth zukommt, wenn sie in solchen Mengen in zwei verschiedenen getrennten Leitern vorhanden sind, dass nach der Berührung beider Leiter mit einander der vollständig unelektrische Zustand hervorgebracht wird, so erkennt man, dass beide Elektricitätsarten sich gerade so zu einander addiren, also auch von einander subtrahiren lassen, wie algebraische Grössen mit verschiedenen Vorzeichen. Aus diesem Grunde nennt man auch beide Elektricitätsarten entgegengesetzte Elektricitäten und bezeichnet die Glaselektricität als die positive mit (+), die Harzelektricität als die negative mit (—). Es ergiebt sich nun der für die mathematische Elektrostatik wichtige Satz:

Werden die beiden Elektricitätsarten nach zweckmässigem Masse so gemessen, dass sich gleiche Mengen beider nur durch das Vorzeichen (+) oder (—) unterscheiden lassen, so geben verschiedene Mengen von Elektricitäten zu einander addirt oder von einander subtrahirt dasselbe Resultat, das man erhält, wenn man ohne weiteres die durch Messung erhaltenen Werthe der beiden Elektricitätsmengen algebraisch addirt oder subtrahirt.

Es handelt sich nun darum, zu untersuchen, welches Mass wohl für beide Elektricitätsarten das zweckmässige sei und ob man auch die Masse für verschiedene Elektricitätsmengen so mit einander multipliciren und durch einander dividiren dürfe, wie es mit algebraischen Grössen geschieht. Ladet man zwei möglichst kleine Körper, am zweckmässigsten Kugeln, mit Elektricität und bringt sie dann so in verschiedene Entfernungen von einander, dass man die Grösse ihrer gegenseitigen Anziehung oder Abstossung messen kann, so findet man, dass dieselbe nahezu umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung der beiden Kugelmittelpunkte ist. Die Versuche ergeben dabei dieses Gesetz um so genauer, je grösser die Entfernung der Kugelmittelpunkte gegen die Dimensionen der beiden Kugeln selbst sind, so dass man schliessen kann, das genannte Gesetz der gegenseitigen Krafteinwirkung müsste genau gelten, wenn es möglich wäre, alle an den Kugeln haftende Elektricität in deren Mittelpunkten zu vereinigen. Dasselbe gilt für die Richtung der Kraftwirkung, die in die Verbindungsgerade der Kugelmittelpunkte entfällt.

Lassen wir nun die Entfernung beider Kugeln constant, ändern aber die Ladung der einen Kugel, so zeigt sich, dass die gegenseitige Kraftäusseruug beider Kugeln zunimmt oder abnimmt, je nachdem man die elektrische Ladung der genannten Kugel vermehrt oder vermindert; die Kraftwirkung nähert sich ferner um so genauer der Null, je kleiner die genannte Kugel ist und je mehr sie sich dem unelektrischen Zustande nähert. Bezeichnen wir also die Ladung der letzteren Kugel in irgend welchem Masse gemessen, mit

m, die der andern mit m' und ist die Kraftwirkung K zwischen beiden Kugeln

$$K = \frac{f(m, m')}{r^2},$$

wenn r den Mittelpunktsabstand beider Kugeln darstellt, so hat die Function $f(m, m')$ die Eigenschaft, dass sie verschwindet, wenn $m = 0$, wir können daher setzen:

$$f(m, m') = m\,\varphi(m, m'),$$

wo $\varphi(m, m')$ eine für $m = 0$ nicht verschwindende Function von m und m' bezeichnet.

Da sich ferner ganz ähnliche Betrachtungen auch anstellen lassen im Bezug auf die andere Kugel, deren Ladung m' ist, so muss auch $\varphi(m, m')$ die Form haben:

$$\varphi(m, m') = m'\,\psi(m, m'),$$

wo nun $\psi(m, m')$ eine weder für $m = 0$ noch für $m' = 0$ verschwindende Function von m und m' ist. Wir erhalten also

$$f(m, m') = m m'\,\psi(m, m')$$

$$K = \frac{1}{r^2}\, m m'\,\psi(m, m').$$

Bedeutet nun die Kraftwirkung K als positive Grösse Abstossung, als negative Anziehung, so erkennt man weiter, dass nach dem bereits angeführten Gesetz, nach welchem sich gleichnamige Elektricitätsmengen abstossen, ungleichnamige anziehen, $\psi(m, m')$ immer einen positiven Werth haben muss, weil der Sinn der Kraftwirkung K bereits durch das Produkt der mit Vorzeichen genommenen Masse von m und m' angegeben wird.

Setzen wir $m = +1$ und ist der absolute Werth der zur positiven Elektricitätsmenge m' gehörigen Kraftwirkung G, so folgt aus der letzten Gleichung

$$m' = \frac{1}{\psi(m, m')}\, r^2\,(+G).$$

Für eine nach dem hier angenommenen Massstabe gleich grosse negative Elektricitätsmenge μ' ergiebt sich

$$\mu' = \frac{1}{\psi(m, m')}\, r^2\,(-G).$$

Addirt man diese beiden Gleichungen, so entsteht

$$m' + \mu' = 0 \text{ oder } m' = -\mu'.$$

Gleich grosse Mengen entgegengesetzter Elektricitäten unterscheiden sich daher, wenn sie nach dem von uns hier angenommenen Massstabe gemessen werden, nur durch ihr Vorzeichen. Dadurch genügt aber nach dem obigen Satze unser hier angenommener Massstab auch der Bedingung, die gestellt werden musste, um Elektricitätsmengen gerade so zu einander addiren und von einander subtrahiren zu können, wie die durch die Messung erlangten Werthe für die Elektricitätsmengen.

Die Function $\psi(m, m')$ genügt nun allen an sie gestellten Bedingungen, wenn wir sie gleich einer Constanten c setzen, die allein abhängig ist von dem Masse, nach welchem wir überhaupt Kräfte messen. Wir setzen also

$$1, \quad K = c. \frac{m. m'}{r^2}$$

für die Kraftwirkung zwischen zwei in Punkten concentrirt gedachten Elektricitätsmengen m und m' in der Entfernung r von einander.

Die Fundamentalgleichung 1, enthält ferner das Produkt $m\,m'$ zweier beliebigen Elektricitätsmengen. Da sich der linker Hand stehende Werth K sowohl nach dem direkt ausführbaren Experimente als auch bei Ausführung der algebraischen Rechnung rechter Hand nicht ändert, wenn man die Vorzeichen von m und m' gegenseitig vertauscht oder beider Vorzeichen in die entgegengesetzten verwandelt, so folgt, dass auch die nach unserem Massstabe erlangten Werthe für verschiedene Elektricitätsmengen gerade so mit einander multiplicirt also auch durch einander dividirt werden können, wie algebraische Grössen. —

Wird ein elektrischer Körper einem anderen elektrischen oder nicht elektrischen genähert, so ändert sich zwar der elektrische Zustand beider Körper, wie man sagt durch Influenz; dabei zeigt aber das Experiment immer den bemerkenswerthen Umstand, dass weder während noch nach der Influenz (wenn beide elektrische Körper wieder sehr weit von einander entfernt sind), die algebraische Summe der

in den Körpern vorhandenen Elektricitäten sich ändert, wenn nicht direkt neue elektrische Massen hinzugefügt oder hinweggenommen werden. —

Die bis jetzt gewonnenen Resultate reichen vollständig aus, um alle Fragen der Elektrostatik auf rein mathematischem Wege zu beantworten. Wir stellen sie zur Uebersicht hier in Kürze zusammen:

1) Ist ein Körper elektrisch, so kann sich die Elektricität frei durch den ganzen mit ponderabler Masse angefüllten Raum desselben bewegen.

2) Es ist der Grösse und dem Vorzeichen nach die Kraft K, welche zwischen zwei in Punkten concentrirten Elektricitätsmengen m und m' in der Entfernung r von einander wirksam ist, bestimmt durch die Gleichung

$$K = c. \frac{m . m'}{r^2},$$

wenn c nur einen von dem Massstabe, nach welchem eine Kraft gemessen wird, abhängigen Werth hat. Die Kraft K bedeutet, wenn ihr Werth positiv ist, Abstossung, wenn er negativ ist, Anziehung und beide Kräfte entfallen ihrer Richtung nach in die Verbindungsgerade der beiden elektrischen Massenpunkte, ihre Angriffspunkte sind diese Punkte selbst.

Benützt man die vorige Gleichung zum Messen von Elektricitätsmengen, so lassen sich letztere gerade so addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren wie algebraische Grössen.

3) Die algebraische Summe von Elektricitätsmengen, gemessen nach dem unter 2) genannten Massstabe und befindlich in demselben Körper, ist unveränderlich, so lange nicht direkt neue elektrische Massen hinzugefügt oder hinweggenommen werden.

Literatur: Coulomb: Mémoire de mathm. de l'Acad. d. Scienc. d. Paris 1785. p. 572. In dieser Arbeit zeigte Coulomb zuerst die Richtigkeit des Gesetzes 2); über die sonstige Literatur vergl. Riess: Die Lehre von der Reibungselektricität. Berlin 1853. Bnd. 1.

§. 2.
Die Aufgaben der Elektrostatik.

Die Aufgaben der Elektrostatik kommen sämmtlich zurück auf die Beantwortung der beiden Cardinalfragen: Wenn irgend eine Anzahl theils elektrischer, theils nicht elektrischer Körper in beliebigen Entfernungen von einander sich befinden, welches ist alsdann die Art der Vertheilung der Elektricität in den gegebenen Körpern, damit die Kräfte, die die einzelnen Elektricitätstheilchen auf einander in jedem einzelnen Körper ausüben, sich das Gleichgewicht halten und mit welchen Kräften müssen die einzelnen gegebenen Körper unterstüzt werden, damit sie in der ihnen angewiesenen Lage verharren?

Die erste Frage erklärt sich nach dem unter 1) in §. 1. angeführten Gesetze von selbst, in so fern ein Gleichgewichtszustand der in einem Körper vorhandenen Electricität unmöglich ist, so lange noch Kräfte zwischen den einzelnen Elektricitätstheilchen thätig sind, die eine Verschiebung derselben in ihrer Lage möglich machen. Die zweite der gestellten Fragen unterscheidet sich nur darin von den gewöhnlichen Fragen der mechanischen Statik, dass die Kräfte, mit welchen man zu rechnen hat, auch herkommen von elektrischen Massentheilchen. Ist nun die Vertheilung der Elektricität nach Eintritt des Gleichgewichtes hekannt, so ist nach 2) §. 1. die Berechnung der wirklich von dem elektrischen Zustande zweier Raumelemente herkommenden Kräfte eine einfache Aufgabe der Analysis. Diese Kräfte aber sind so beschaffen, wie diejenigen, die der ganzen Abhandlung im ersten Capitel zu Grunde gelegt wurden. Berechnet man also die Potentialfunction V der elektrischen Massen, deren Vertheilung im Gleichgewichtszustande wir jetzt als bekannt voraussetzen, so liefern die ersten Betrachtungen von §. 1. Cap. I. die Kräfte, die auf irgend einen Punkt des Raumes von den elektrischen Massen ausgeübt werden. Kennt man aber diese Kräfte, so hat die Beantwortung der zweiten

der in diesem Paragraphen gestellten Cardinalfragen keine Schwierigkeit mehr. Die wichtigste Frage der Elektrostatik ist also die, wie ordnen sich in einem beliebigen System von Körpern die denselben mitgetheilten Elektricitäten an, wenn sie sich im Zustande des Gleichgewichts befinden?

In §. 1. wurde die Eintheilung aller Körper in gute und schlechte Elektricitätsleiter erwähnt. Es ist darin schon ausgesprochen, dass es weder Körper giebt, die die Elektricität gar nicht leiten, noch solche, in denen die Elektricität sich momentan, ohne dass sie dazu irgend welche Zeit braucht, fortpflanzt. Da wir nun nie im Stande sind, Elektricitätsleiter frei von einem ponderablen sie umgebenden Medium, also ohne ein die Elektricität leitendes Zwischenmittel, aufzustellen, so hätten wir eigentlich stets als Elektricitätsleiter den ganzen unendlichen Raum oder wenigstens die ganze Erde mit allen sie umgebenden ponderablen Medien in Rechnung zu ziehen. Allein es giebt doch Körper, welche die Elektricität so schlecht leiten, dass sie wenigstens innerhalb einer gewissen kurzen Zeit als vollkommene Nichtleiter betrachtet werden können, während andere wieder die Elektricität in kaum messbar kurzer Zeit durch ihre ganze Masse hindurchleiten. Es ist daher zweckmässig, nur diese beiden Gruppen von Körpern zu betrachten, indem man weiss, dass das Rechnungsresultat entweder nur für eine verhältnissmässig kurze Zeit genau ist, oder indem man, um es mit dem Experiment in Einklang zu bringen, noch eine von der Zeit abhängige Correction des Rechnungsresultates anbringt.

Ueber die Anbringung derartiger Correctionen kann man vergleichen: Coulomb: Mém. de l'Acad. de Paris 1785 p. 616 seqq. Biot: Traité de phys. 2, 256. Riess: Die Lehre von der Reibungselektricität, Berlin 1853. Wir haben uns hier mit den genannten Erscheinungen, die man mit dem Namen der Zerstreuung der Elektricität belegt, um so weniger zu beschäftigen, als sie hervorgerufen werden durch eine Bewegung der Elektricität, also in das Gebiet der Elektrodynamik gehören.

Es ist die von uns fernerhin festgehaltene Eintheilung aller Körper in Leiter und Nichtleiter für Elektricität um

so gerechtfertigter, als wirklich sich alle bekannten Körper in zwei Gruppen so sondern lassen, dass die Elektricität in der einen Gruppe sich nur sehr langsam, in der anderen sehr schnell fortpflanzt. Es ist dann auch die Bestimmung der Vertheilung der Elektricität im Gleichgewichtszustande in Nichtleitern kein Rechnungsresultat, sondern dieselbe muss unmittelbar gegeben sein, so dass die Hauptaufgabe der Elektrostatik nur für Leiter zu lösen übrig bleibt.

Ist die in einem Raumelement $dx\, dy\, dz$ eines elektrischen Körpers vorhandene Elektricitätsmenge dq, so setzen wir

$$1, \quad dq = \varrho\, dx\, dy\, dz$$

und nennen die durch diese Gleichung definirte Grösse ϱ die Dichtheit der Elektricität im Raumelement $dx\, dy\, dz$.

Gehen wir von diesem Raumelement zu anderen Raumelementen über, so erlangt offenbar im allgemeinen auch ϱ andere Werthe, wir können daher ϱ als Function der drei Raumcoordinaten x, y, z auffassen und setzen

$$\varrho = f(x, y, z).$$

Dann erscheint ϱ als Function des Ortes und die Cardinalfrage, welche nun in der Elektrostatik allein zu beantworten bleibt, lässt sich in die Worte fassen: „**Wie ist die Function des Ortes $\varrho = f(x, y, z)$ für Elektricitätsleiter beschaffen, wenn ihre Elektricität sich im Zustande des Gleichgewichtes befindet?**“

§. 3.

Die analytischen Bedingungen für das elektrische Gleichgewicht.

Irgend ein beliebiges System von Elektricitätsleitern und Nichtleitern sei in unveränderlicher gegenseitiger Lage im Raume gegeben. Der elektrische Zustand der Nichtleiter sei bekannt, also auch die aus ihm entspringende Potentialfunction für beliebige Punkte des Raumes; in gleicher Weise seien die den Leitern unmittelbar mitgetheilten Elektricitätsmengen bekannt. Diese letzteren Elektricitätsmengen können sich also nur in Bahnen bewegen, deren Lage von der Zeit unabhängig ist.

Ein berühmtes Gesetz der Mechanik sagt nun: Irgend ein System von Massenpunkten, die sich in beliebigen aber von der Zeit unabhängigen Bahnen bewegen können, befindet sich im Zustande des Gleichgewichtes, wenn die während der Bewegung geleistete Arbeit ein Maximum oder Minimum ist. Das Gleichgewicht ist stabil, wenn die geleistete Arbeit ein Maximum, labil, wenn sie ein Minimum ist, theils stabil theils labil, wenn die geleistete Arbeit einzelner Partialsysteme von Massenpunkten ein Maximum, der anderen Partialsysteme ein Minimum ist.

In §. 1. Cap. I. haben wir gefunden, dass die negative bei der Bewegung geleistete Arbeit in unserem Falle ausgedrückt werden kann durch das Potential der vorhandenen elektrischen Massen auf sich selbst. Nehmen wir die Bezeichnung in dem genannten Paragraphen wieder auf, so ist also das elektrische Gleichgewicht

$$\left.\begin{matrix}\text{stabil}\\ \text{labil}\\ \text{theils stabil}\\ \text{theils labil}\end{matrix}\right\}\text{wenn } -P = -\tfrac{1}{2}\int\!\!\int\frac{\varrho\varrho'}{r}\,dk\,dk'\left\{\begin{matrix}\text{ein Maximum}\\ \text{„ Minimum}\\ \text{theils ein Max.}\\ \text{theils ein Min. ist.}\end{matrix}\right.$$

Diese Gleichgewichtsbedingung nimmt, wenn wir dem analytischen Ausdruck das positive Vorzeichen geben, nothwendig die Form an: das elektrische Gleichgewicht ist

$$\left.\begin{matrix}\text{stabil}\\ \text{labil}\\ \text{theils stabil}\\ \text{theils labil}\end{matrix}\right\}\text{wenn } P = \tfrac{1}{2}\int\!\!\int\frac{\varrho\varrho'}{r}\,dk\,dk'\left\{\begin{matrix}\text{ein Minimum}\\ \text{„ Maximum}\\ \text{theils ein Min.}\\ \text{theils ein Max.}\end{matrix}\right\}\text{ist.}$$

Die Integration hat sich dabei über den ganzen von elektrischer Masse erfüllten gegebenen Raum zu erstrecken. Der Ausdruck für P kann aber nie ein Maximum haben, weil, wenn man in jedem einzelnen Leiter die entgegengesetzten Elektricitäten sondert und auf möglichst enge Räume die einzelnen Elektricitätsarten zusammendrängt, man den Nenner r beliebig klein, also P selbst beliebig gross und um ein beliebiges grösser als jede endliche gegebene Grösse machen kann. Ein Umstand, der nicht bloss für einen einzelnen ganzen Leiter, sondern auch für jeden Theil desselben

gilt. Wir erhalten hieraus den ersten wichtigen Satz der Elektrostatik:

Der Gleichgewichtszustand der Elektricität in Leitern kann nur ein stabiler sein.

Für die Folge ist es daher gerechtfertigt, wenn wir nur von elektrischem Gleichgewicht sprechen, insofern dasselbe nur stabiler Natur sein kann.

Bedeutet nun V die Potentialfunction, die herkommt von der Vertheilung ϱ' der Elektricität, so fordert die Bedingung des elektrischen Gleichgewichtes, dass

$$\tfrac{1}{2}\int \varrho V dk$$

ein Minimum sei.

Lassen wir die Elektricitätstheilchen innerhalb der Leiter eine unendlich kleine virtuelle Bewegung machen, so kommt diess hinaus auf eine Aenderung der Anordnung der Elektricität innerhalb der Leiter. Damit also das ebengenannte Integral ein Minimum sei, muss die in Beziehung auf ϱ genommene Variation desselben verschwinden. Ist nun die Variation von ϱ $\delta\varrho$, so ändert sich auch V um δV, wenn δV die von der Variation $\delta\varrho$ herkommende Potentialfunction bezeichnet, unveränderlich aber sind die Integrationsgrenzen.

Das genannte Integral wird also ein Minimum, wenn

$$\tfrac{1}{2}\int (V\delta\varrho + \varrho\delta V)\, dk = 0,$$

oder wenn

$$\int V\delta\varrho dk + \int \varrho\delta V dk = 0.$$

Nun ist
$$V = \int^{\bullet} \frac{\varrho'}{r}\, dk' = \int^{\bullet} \frac{\varrho}{r}\, dk;$$

$$\delta V = \int^{\bullet} \frac{\delta\varrho}{r}\, dk$$

folglich auch, wie man leicht durch Einsetzen der eben genannten Werthe verificiren kann

$$\int V\delta\varrho dk = \int \varrho\delta V dk.$$

Die Bedingung für das elektrische Gleichgewicht ist also einfach

$$1, \quad \int V\delta\varrho dk = 0$$

oder
$$\int \varrho\delta V dk = 0.$$

Zugleich erkennt man, dass die Integrationen nicht mit über die von Nichtleitern erfüllten Räume erstreckt zu werden brauchen, weil für diese sowohl $\delta\varrho$ wie δV von selbst für alle Raumelemente dk verschwindet.

Sind nun im Ganzen q Leiter für Elektricität gegeben und unterscheiden wir das auf die einzelnen dieser Leiter Bezügliche durch angehängte Indexe, so können wir die Gleichungen 1, auch schreiben in der Form

$$2, \quad \begin{aligned} &\int_{(1)} V\delta\varrho_1\, dk_1 + \int_{(2)} V\delta\varrho_2\, dk_2 + \int_{(3)} V\delta\varrho_3\, dk_3 + \ldots + \int_{(q)} V\delta\varrho_q\, dk_q = 0 \\ &\int_{(1)} \varrho_1\, \delta V dk_1 + \int_{(2)} \varrho_2\, \delta V dk_2 + \int_{(3)} \varrho_3\, \delta V dk_3 + \ldots + \int_{(q)} \varrho_q\, \delta V dk_q = 0. \end{aligned}$$

Sind ferner $g_1, g_2, g_3, \ldots g_q$ die den einzelnen Leitern direkt mitgetheilten Elektricitätsmengen, so ist

$$\int_{(1)} \varrho_1\, dk_1 = g_1; \int_{(2)} \varrho_2\, dk_2 = g_2; \int_{(3)} \varrho_3\, dk_3 = g_3; \ldots \int_{(q)} \varrho_q\, dk_q = g_q.$$

Nach dem Gesetze 3) §. 1. müssen nun die Variationen $\delta\varrho_1, \delta\varrho_2, \delta\varrho_3 \ldots \delta\varrho_q$ so beschaffen sein, dass sich die Werthe $g_1, g_2, g_3, \ldots g_q$ nicht zugleich mit ändern, die vorigen Gleichungen liefern daher das System neuer Gleichungen

$$3, \quad \int_{(1)} \delta\varrho_1\, dk_1 = 0; \int_{(2)} \delta\varrho_2\, dk_2 = 0; \int_{(3)} \delta\varrho_3\, dk_3 = 0; \ldots \int_{(q)} \delta\varrho_q\, dk_q = 0.$$

Die Gleichungen 3, können nun mit der ersten der Gleichung 2, zu einer einzigen Bedingungsgleichung für das elektrische Gleichgewicht vereinigt werden, wenn man die der Reihe nach mit beliebigen constanten Factoren $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_q$ multiplicirten Gleichungen 3, von der ersten der Gleichungen 2, abzieht. Es entsteht

$$4, \quad \int_{(1)} (V-\alpha_1)\,\delta\varrho_1\, dk_1 + \int_{(2)} (V-\alpha_2)\,\delta\varrho_2\, dk_2 + \int_{(3)} (V-\alpha_3)\,\delta\varrho_3\, dk_3 + \ldots + \int_{(q)} (V-\alpha_q)\,\delta\varrho_q\, dk_q = 0.$$

In der Gleichung 4, sind nun die Variationen $\delta\varrho_1, \delta\varrho_2, \delta\varrho_3, \ldots \delta\varrho_q$ beliebige Functionen des Ortes, es ist daher auch erlaubt, über sie der Reihe nach die Substitutionen zu machen

$$\delta\varrho_1 = \delta\varrho_1;\ \delta\varrho_2 = \delta\varrho_3 = \delta\varrho_4 = \ldots = \delta\varrho_q = 0;$$
$$\delta\varrho_2 = \delta\varrho_2;\ \delta\varrho_1 = \delta\varrho_3 = \delta\varrho_4 = \ldots = \delta\varrho_q = 0;$$

$$\delta\varrho_3 = \delta\varrho_3;\ \delta\varrho_1 = \delta\varrho_2 = \delta\varrho_4 = \ldots\ldots = \delta\varrho_q = 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\delta\varrho_q = \delta\varrho_q;\ \delta\varrho_1 = \delta\varrho_2 = \delta\varrho_3 = \ldots\ldots = \delta\varrho_{q-1} = 0.$$

Führt man diese Substitutionen der Reihe nach in die Gleichung 4, ein, so liefert diese Gleichung das System Bedingungsgleichungen für das elektrische Gleichgewicht:

$$5,\quad \begin{aligned} &\int_{(1)} (V - \alpha_1)\, \delta\varrho_1\, dk_1 = 0 \\ &\int_{(2)} (V - \alpha_2)\, \delta\varrho_2\, dk_2 = 0 \\ &\int_{(3)} (V - \alpha_3)\, \delta\varrho_3\, dk_3 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\int_{(q)} (V - \alpha_q)\, \delta\varrho_q\, dk_q = 0. \end{aligned}$$

Auch in den einzelnen Gleichungen 5, sind die Werthe von $\delta\varrho_1, \delta\varrho_2, \delta\varrho_3, \ldots\ldots \delta\varrho_q$ noch ganz willkürliche Functionen des Ortes, sollen die Gleichungen 5, trotzdem erfüllt sein, so ist diess nicht anders möglich als wenn

$$\text{I,}\quad V_1 = \alpha_1;\ V_2 = \alpha_2;\ V_3 = \alpha_3;\ \ldots\ldots V_q = \alpha_q,$$

wobei allgemein V_s bedeutet den Werth, den die Gesammtpotentialfunction aller vorhandenen elektrischen Massen für Punkte des s^{ten} Leiters hat.

In Worten lassen sich diese Bedingungsgleichungen folgendermassen ausdrücken:

Wenn sich in einem beliebig gegebenen Leitersystem die Elektricität im Zustande des Gleichgewichtes befinden soll, so muss die Gesammtpotentialfunction aller vorhandenen wirksamen elektrischen Massen für alle Punkte eines und desselben Leiters den gleichen Werth haben.

Aus dem in §. 1. Cap. I. erklärten Begriff des Potentiales kann man nun auch leicht die Bedeutung der in den Gleichungen I, vorkommenden Constanten α erklären. Diese constanten mit α bezeichneten Werthe bedeuten nämlich die negative Arbeit, die von der gesammten vorhandenen Elektricität geleistet werden müsste, wenn die Elektricität der Leiter so aus unendlicher Entfernung in die ihnen in den Leitern zukommende Lage übergeführt würde, dass sie zwar

immer mit ihrer gesammten Elektricität auf sich selbst wirkte, selbst aber der Bewegung einen Widerstand entgegensetzte, als ob ihre Dichtheit allenthalben constant + 1 wäre.

Anmerkung. Poisson[1]) stellte die Gleichungen I, ohne weiteres als Bedingung des elektrischen Gleichgewichtes in Leitern hin, indem er annahm, dass, sobald Gleichgewicht eingetreten sei, die Gesammtwirkung aller vorhandenen elektrischen Massen auf irgend einen Punkt im Innern eines jeden Leiters verschwinden müsse (eine Forderung, deren prägnanter Ausdruck allerdings die Gleichungen I, sind), damit die Anordnung der Elektricität in den Leitern eine beharrlich fortdauernde sei, weil, wenn die Resultante der Gesammtwirkung an irgend einem Punkte nicht verschwinde, die Elektricitäten, welche den Leitermolekülen von Natur beigegeben wären, zersetzt werden (in gleich grosse Mengen positiver und negativer Elektricität) und sich zu der vorhandenen elektrischen Vertheilung hinzufügen würden, das elektrische Gleichgewicht also wieder aufgehoben werden würde. Diese Hypothese wurde auch fernerhin von allen denen festgehalten, die elektrostatische Probleme analytisch behandelten.

Abgesehen aber davon, dass nach der Hypothese von Poisson weder die Natur des Gleichgewichtes noch die Bedeutung der in den Gleichungen I, vorkommenden Constanten deutlich zu Tage tritt, muss man gegen dessen Hypothese auch die Erscheinungen anführen, die bei der stationären elektrischen Strömung auftreten. Auch hier ist die Vertheilung der Elektricität auf und innerhalb der Leiter eine constante und dennoch kann es Niemandem einfallen, die resultirende Wirkung auf Punkte im Innern der Leiter zu leugnen, warum könnte nicht auch in den von Poisson der Rechnung unterworfenen Fällen eine Kraftwirkung und in Folge dessen Strömung

---

1) Poisson: Sur la distribution de l'électricité à la surphase des corps conducteurs. Mém. de la classe des sc. mathm. et phys. de l'institut. Année 1811.

der Elektricität statt finden, derart, dass die algebraische Summe der strömenden Elektricitätstheilchen in jedem Punkte der Leiter verschwände?

Ausserdem lässt sich gegen Poisson anführen, dass er von Anfang an eine Hypothese, nämlich die Trennung der beiden Elektricitäten in jedem neutralen Punkte des Leiters durch eine Scheidungskraft, herkommend von der elektrischen Anziehung und Abstossung auf von wirksamer Elektricität freie Punkte (vergl. den folgenden §. 4.) in die Rechnung einführt, während doch diese Kraft nach dem Coulombschen Gesetze 2) §. 1., das nothwendig auch von Poisson anerkannt wird, verschwinden muss. Es ist immer misslich, einer Rechnung Hypothesen zu unterbreiten, die sich gegenseitig widersprechen.

Für uns folgt, wie sich später zeigen wird, die Bestätigung der Hypothese von Poisson, die ja auch von der Experimentalphysik anerkannt wird, als eine Forderung der Rechnung aus den Sätzen 1) 2) und 3) §. 1. dann, wenn es sich um die sogenannte Influenzelektricität handelt. Es wird sich aber auch später zeigen, dass alle drei Sätze, 1) 2) und 3) §. 1. aus einer einzigen sehr natürlichen Hypothese erklärt werden können. Wir verweisen in dieser Hinsicht hier auf das Schlusskapitel dieser Schrift.

Die Betrachtungen und Resultate des ersten Capitels wurden vielfach in ihrer Allgemeingültigkeit alterirt, wenn die Flächen, um die es sich handelte, scharfe Spitzen oder Kanten besassen, wir schliessen desswegen Leiter, die Oberflächen mit scharfen Spiten oder Kanten besitzen, im allgemeinen von unserer Betrachtung aus, indem wir diese Fälle als Grenzfälle ansehen, zu denen man gelangt, wenn man die Krümmung der Oberfläche an der entsprechenden Stelle unendlich gross werden lässt. Die in der Folge ausgesprochenen allgemeinen Sätze der Elektrostatik mögen daher immer mit der eben genannten Reserve aufgefasst werden.

§. 4.
Allgemeine Lehrsätze über die elektrische Ladung von Leitern.

Elektricität befindet sich nur an der Oberfläche der Leiter. Aus den Bedingungsgleichungen I, §. 3. für das elektrische Gleichgewicht folgt ohne weiteres, dass für jeden Punkt des innern Raumes irgend eines, etwa des s^{ten} Leiters, $\Delta V = 0$. Dann aber lehrt die Gleichung II, in §. 3. Cap. I., dass auch im ganzen Innern bis unendlich nahe an die Oberfläche des s^{ten} Leiters die Dichtheit der Elektricität Null sei, oder dass die Elektricität sich nur in einer unendlich dünnen Schicht an der Oberfläche des s^{ten} Leiters befinden könne. Wir sprechen diess aus in dem Satze: Wirksàme Elektricität kann sich, wenn im Zustande des Gleichgewichtes an irgend einem Leiter haftend, nur in einer unendlich dünnen Schicht an dessen Oberfläche befinden.

Dieses Resultat, das die Experimentalphysik schon lange als Thatsache anerkannt hat, erklärt, warum es für die Gleichgewichtserscheinungen an Leitern ganz gleichgültig ist, aus welcher Substanz deren innere Masse besteht, und es ändert sich an diesen Erscheinungen nichts, wenn die innere Masse aus Nichtleitern besteht oder der ganze innere Raum leer ist. Es wird praktisch wichtig in allen den Fällen, wo es entweder gilt, an ponderabler Leitermasse zu sparen, oder wo an einem Leiter haftende Elektricität mit dem Leiter transportirt werden soll, indem man durch Aushöhlung, also Leichtermachen des Leiters an bewegender Kraft sparen kann.

Vereinfachung der Bedingungen I, §. 3. für das elektrische Gleichgewicht. Das eben erlangte Resultat lässt nun in Verbindung mit den Gleichungen I, §. 3. die Oberflächen der gegebenen Leiter als Niveauflächen der Potentialfunction V aller vorhandenen wirksamen elektrischen Massen betrachten, innerhalb deren keine wirksamen elektrischen Massen vorhanden sind. Wir schliessen natürlich hierbei den auch möglichen Fall von unserer Betrachtung aus, dass in der Höhlung eines Leiters mit Fleiss elektrische Massen (etwa

[illegible] vorausgesetzt werden. [illegible] die Bedingungen [illegible] immer wenn die Le- [illegible] Wir übertragen [illegible] Verwerthung. [illegible]

[illegible] Leiter die [illegible] $= \text{const.}$ [illegible] für die Ober- [illegible] selbst [illegible] des Leiters.

Man hat also nicht nöthig, die Bedingungen I. §. 8. für [illegible] für den ganzen vom Leiter eingenommenen Raum zu erfüllen, sondern es reicht aus, sie nur für alle Punkte der Oberflächen der Leiter zu [illegible].

2) Ist die Potentialfunction aller vorhandenen elektrischen Massen bekannt, so folgt die Dichtigkeit ε der Elektricität an irgend einer Stelle der [illegible] Leiters einfach aus der Gleichung

$$\varepsilon = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V_e}{\partial n}\right)_{-1}.$$

3) Kein Oberflächenelement eines Leiters bleibt frei von Elektricität, ausser wenn die gesammte elektrische Masse eines jeden Leiters für sich verschwindet, in welchem Falle dann die ganze Oberfläche des Leiters von elektrischer Masse frei bleibt. Der letztere Fall kann also nur dann eintreten, wenn allen vorhandenen Leitern gar keine Elektricität mitgetheilt wurde und in jedem etwa vorhandenen Nichtleiter gleichviel positive und negative Elektricität sich befindet.

Es ist also unmöglich, etwa durch Anordnung äusserer elektrischer Massen einen Oberflächentheil eines Leiters elektricitätsfrei zu machen.

Das eben erlangte Resultat führt nun in Verbindung mit gewissen Sätzen von §. 9. Cap. I. zu dem neuen Satze:

4) Ist die Potentialfunction V_e constant für irgend einen nicht unendlich kleinen Raum im Innern

des s^{ten} Leiters, so ist sie es auch für alle Punkte des vom ganzen Leiter erfüllten Raumes.

Man hat also auch nicht nöthig, die Bedingungsgleichungen I, §. 3. für alle Punkte des ganzen von einem Leiter eingenommenen Raumes zu erfüllen, sondern es reicht aus, diesen Bedingungen für beliebige endlich kleine in den einzelnen Leitern gelegene Räume zu genügen.

5) Multiplicirt man die unter 2) erhaltene Gleichung mit $\varrho\, d\sigma_s$, wenn $d\sigma_s$ bedeutet das Oberflächenelement des s^{ten} Leiters mit der elektrischen Dichtigkeit ϱ, so erhält man

$$\varrho \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} d\sigma_s = -\,4\pi\varrho^2\, d\sigma_s.$$

Die linke Seite dieser Gleichung bedeutet aber nichts anderes als die negative treibende Kraft, da nun, wie die rechte Seite der Gleichung lehrt, das Vorzeichen derselben immer negativ ist, gleichgültig ob ϱ das positive oder negative Vorzeichen besitzt, so folgt hieraus, dass jedes Elektricitätstheilchen eines mit Elektricität geladenen Leiters einen Bewegungsantrieb erleidet, der proportional ist dem Quadrate seiner Dichtheit und gerichtet nach den nach aussen an seiner Stelle auf der Leiterfläche errichteten Normalen.

Die Elektricität kann sich nur in einer einzigen Gleichgewichtslage anordnen und es giebt stets eine solche Anordnung. Es tritt nun zunächst die wichtige Frage auf, ob man den Bedingungsgleichungen I, §. 3. immer genügen könne, wie auch die Oberflächen der gegebenen Leiter und die vorhandenen Elektricitätsmengen beschaffen sein mögen. Wir nehmen an, dass man die Constanten α auf irgend eine, später noch näher zu bestimmende Weise als endliche bestimmte Werthe berechnet habe. Die Potentialfunction V ist dann nach den ersten Sätzen des ersten Capitels im ganzen innern Raume eines jeden der gegebenen Leiter zugleich mit ihren ersten Derivirten allenthalben endlich und stetig, weil nach dem ersten Lehrsatze dieses Paragraphen im innern Raume eines jeden Leiters gar keine Elektricitäten vorhanden sind. Speciell besteht das genannte endlich und stetig sein der Potentialfunction in constant bleiben, und deren ersten Derivirten in constant der Null gleich sein.

Im Innern eines jeden Leiters ist weiter nach dem ersten Satze dieses Paragraphen $\Delta V = 0$ und nach dem unter 1) angeführten Lehrsatze reicht es für das elektrische Gleichgewicht aus, dass V nur auf der Oberfläche eines jeden Leiters constant bleibt.

Es sind also alle die Bedingungen erfüllt, die in §. 8. Cap. I. gestellt wurden, wenn die Function V, die diesen Bedingungen genügen sollte, immer vorhanden sein sollte und wenn zugleich nur eine einzige solche Function V existiren sollte.

Für uns folgt daraus hier der wichtige Satz:

Die Bedingungsgleichungen I, §. 3 für das elektrische Gleichgewicht auf irgend einem gegebenen Leitersystem können immer und zwar nur auf eine einzige Weise erfüllt werden.

Da ferner nach dem unter 2) angeführten Satze die Dichtigkeit ϱ der Elektricität auf irgend einem Leiter einfach aus der berechneten Potentialfunction berechnet werden kann, so folgt weiter:

Es giebt nur eine einzige und stets eine Art, nach der sich die Elektricität im Gleichgewichtszustande über ein gegebenes Leitersystem vertheilt.

Bedeutung des Falles, wenn die Constanten α verschwinden. Es kann nach der in §. 3. gegebenen Definition der Constanten α geschehen, dass eine oder mehrere derselben verschwinden; es ist diess nämlich dann möglich, wenn ein Leiter mit seinen Dimensionen bis ins Unendliche reicht. Für praktische Zwecke geschieht diess mit sehr grosser Annäherung, wenn die ganze Erde mit dem Leiter in leitende Verbindung gesetzt wird. Geschieht diese Verbindung durch einen möglichst dünnen Draht, so kann man die auf dem Drahte befindliche Elektricität gegen die auf dem Leiter befindliche vernachlässigen, weil die Elektricität auf dem Drahte in so geringer Menge vorhanden sein muss, dass ihre Potentialfunction für alle Punkte im Innern und auf dem Drahte verschwinden muss. Die Experimentalphysik sagt in diesem Falle, der Leiter sei zur Erde abgeleitet. Für die mathematische Elektrostatik drückt sich

also die Ableitung eines Leiters zur Erde dadurch aus, dass die betreffende Constante α des Leiters gleich Null zu setzen ist, vorausgesetzt ist dabei freilich, dass die Ableitung geschieht durch einen verschwindend dünnen Draht und dass die Erde und die mit ihr in leitender Verbindung stehenden Gegenstände weit genug von dem betreffenden Leiter entfernt sind. Sind nämlich diese Bedingungen nicht erfüllt, so muss auch die Elektricität berücksichtigt werden, die sich auf der Vorrichtung zum Ableiten und auf den dem Leiter benachbarten Gegenständen befindet. Da alle Substanzen leitend sind, so findet Ableitung streng genommen stets statt. Ein Leiter, der durch Umgebung mit möglichst schlecht leitenden Substanzen möglichst von Ableitung befreit ist, wird isolirt genannt.

§. 5.

Die Vertheilung der Elektricität über einen einzelnen isolirten Leiter.

Es sei K ein einziger isolirter, d. h. von allem Einfluss fremder elektrischer Massen befreiter Leiter, dem man die Elektricitätsmenge G mitgetheilt hat. Es lässt sich dann zunächst beweisen, dass die Elektricität auf K überall einerlei Vorzeichen haben muss, wenn sie sich auf K im Zustande des Gleichgewichtes befinden soll. Unter dieser Bedingung muss nämlich nach §. 3. und nach dem ersten Lehrsatz in §. 4.

$$\int\int \frac{\varrho\,\varrho'}{r}\, d\sigma .\, d\sigma'$$

ein Minimum sein, wenn ϱ und ϱ' bedeuten die Dichtheiten der Elektricität in den beiden Flächenelementen $d\sigma$ und $d\sigma'$, deren Entfernung von einander r darstellt, und wenn beide auszuführenden Integrationen über die ganze Oberfläche des Leiters K erstreckt werden. Gesetzt nun es könnten die Dichtheiten ϱ und ϱ' verschiedene Vorzeichen haben, so könnte man, indem man die Entfernungen der ihnen entsprechenden Flächenelemente kleiner und kleiner nimmt, oder mit andern Worten, indem man die Stellen mit entgegengesetzten elektrischen Dichtheiten einander näher und näher wählt, jedes Element des genannten Doppelintegrales

dem absoluten Werthe nach grösser machen als jede noch so grosse gegebene Grösse, mit Rücksicht auf das Vorzeichen also kleiner als jede gegebene noch so kleine Grösse. Unter der gemachten Voraussetzung hätte also das genannte Doppelintegral gar kein Minimum, folglich kann auch die Dichtigkeit ϱ der Elektricität auf dem Leiter K nicht an verschiedenen Stellen verschiedene Vorzeichen haben, wenn Gleichgewicht stattfinden soll. Wir erhalten also den Satz:

Auf einem einzelnen isolirten und von der Einwirkung benachbarter elektrischer Massen befreiten Leiter zeigt die Elektricität allenthalben dasselbe Vorzeichen.

Nach dem Satze 3) §. 1. versteht es sich hierbei von selbst, dass das Vorzeichen der Elektricität auf dem Leiter übereinstimmen muss mit dem Vorzeichen der ihm direkt mitgetheilten Elektricitätsmenge G.

Da sich in dem in diesem Paragraphen zu besprechenden Falle wirksame elektrische Massen nur auf der Oberfläche des Leiters K befinden, die zugleich für diese Massen eine Niveaufläche darstellt, so können nun leicht die in den Paragraphen 10. und 11. Cap. I. erlangten Lehrsätze hierher übertragen werden, wenn man bedenkt, dass nach 2) §. 4. das Gefälle, das zur Leiteroberfläche als Niveaufläche gehört, proportional ist der Dichtheit der Elektricität in dem Punkte, zu dem das Gefälle gehört.

Nach §. 11. Cap. I. ist es zunächst möglich, die Gesammtmasse der auf dem Leiter K befindlichen Elektricität in den innern Raum des Leiters zu verlegen, wenn der Leiter keine scharfen nach aussen gekehrten Kanten oder Spitzen besitzt, ohne dass die Potentialfunction für Punkte auf und ausserhalb der Leiteroberfläche sich ändert. Denken wir uns diese äquivalente Massentransposition gemacht, so gilt nun auch für alle Punkte auf und ausserhalb der Leiteroberfläche $\Delta V = 0$, dann aber können wir auch die Resultate von §. 10. Cap. I. hierher übertragen in der Form:

Die Dichtheit der Elektricität auf einem isolirten und von scharfen nach aussen gekehrten Spitzen oder Kanten freien Leiter ist stärker an den nach aussen convexen Stellen der Oberfläche

als an den concaven, sie ist am stärksten an den Stellen mit der grössten negativen Krümmung, am schwächsten an denen mit der grössten positiven Krümmung; die von den elektrischen Massen ausgeübte Kraftwirkung nimmt aber für Punkte ausserhalb und in der Nähe der Leiteroberfläche um so schneller ab, je grösser die absolute elektrische Dichtheit der in der Nähe befindlichen Oberflächenpunkte ist.

Leitet man den isolirten Elektricitätsleiter K durch einen möglichst dünnen Draht zur Erde ab, so ist nach dem, was in §. 4. über die Ableitung zur Erde gesagt wurde, der constante Werth der Potentialfunction auf und innerhalb des Leiters K gleich Null, folglich nach §. 9. Cap. I. auch die auf dem Leiter befindliche Gesammtmasse von Elektricität, oder, weil der Leiter K nach der Ableitung zur Erde mit dieser nur einen einzigen isolirten Leiter darstellt, also auch die Elektricität auf dem Gesammtleiter nach dem im Anfange dieses Paragraphen genannten Satze allenthalben einerlei Vorzeichen hat, es ist auch an allen Stellen des Leiters K die elektrische Dichtheit gleich Null.

Es ist bemerkenswerth, dass sich an dem Endresultate dieser Betrachtung nichts ändert, wenn die Ableitung nicht durch einen möglichst dünnen leitenden Draht, sondern überhaupt durch einen irgend wie gestalteten Leiter geschieht, weil der jetzt gültige Satz von der Gleichheit des Vorzeichens der elektrischen Dichtheit jetzt die Berücksichtigung der auf dem ableitenden Körper befindlichen Elektricität unnöthig macht.

Auf dem eben gewonnenen Resultate beruht das, was die Experimentalphysik mit dem Namen der Entladung eines geladenen isolirten Leiters zur Erde bezeichnet.

Ist die für das elektrische Gleichgewicht auf dem isolirten Leiter K geltende Gleichung

$$V = \alpha,$$

wo V die Potentialfunction der auf dem Leiter K mit der variablen Dichtheit ϱ vorhandenen Elektricität ist, so geht V in μV über, wenn ϱ in $\mu \varrho$ übergeht, wo μ ein con-

stanter Factor ist; in gleicher Weise muss dann α in $\mu\alpha$ übergehen. Umgekehrt folgt aus der Einheit des elektrischen Gleichgewichtes, dass, wenn α in $\mu\alpha$ übergeht, ϱ in $\mu\varrho$ übergehen muss. Kennt man daher die der Gleichung

$$V = 1$$

entsprechende Anordnung der Elektricität im Gleichgewichtszustande, so folgt ohne weiteres daraus die der Gleichung

$$V = \alpha$$

entsprechende, indem man statt der bekannten vorigen elektrischen Dichtheit allenthalben die αfache setzt.

Hieraus ergiebt sich weiter, dass im letzteren Falle und also auch allgemein der Ausdruck für die Dichtheit der Elektricität auf den isolirten Leiter K die Form hat

$$\varrho = \alpha f_1 (x, y, z),$$

wo $f_1 (x, y, z)$ eine Function der Oberflächenpunkte des Leiters K bezeichnet. Das Vorzeichen von ϱ hängt zugleich allein von dem des α ab und stimmt mit ihm überein.

Setzt man statt des isolirten Leiters K einen anderen ähnlichen K_1, dessen lineare Dimensionen durchgängig das λfache des Leiters K betragen, so geht der entsprechende Ausdruck V_1 für $V = \int \frac{\varrho}{r} d\sigma$ über in

$$V_1 = \int \frac{\varrho_1}{\lambda r} \lambda^2 d\sigma = \lambda \int \frac{\varrho_1}{r} d\sigma,$$

wenn ϱ_1 die Dichtigkeit der Elektricität auf K_1 bezeichnet.

Das letztere Integral ist dabei ebenfalls über eine Fläche zu erstrecken, die gleich ist der Oberfläche von K. Setzen wir also $\varrho_1 = \varrho$, so entsteht $V_1 = \lambda V$. Es ist also auch V_1 für alle Punkte der Oberfläche von K_1 constant, wenn V für alle Punkte der Oberfläche von K constant ist. Da nun die Vertheilung der Elektricität über K_1 im Gleichgewichtszustande nur auf eine einzige Weise möglich ist, so folgt für uns der Satz:

Auf ähnlichen Leitern sind die an verschiedenen entsprechenden Stellen vorhandenen Dichtheiten der Elektricität einander proportional, wenn auf ihnen die Elektricität sich im Zustande des Gleichgewichtes befindet.

§. 6.
Die Influenzelektricität.

Unter Influenz verstehen wir die wirksame Gegenwart mit Elektricität versehener Körper, die sich dadurch äussert, dass der elektrische Gleichgewichtszustand von Leitern ein anderer ist als er sein würde, wenn die Leiter sich isolirt im Raume befänden. Um im Allgemeinen die Wirkung der Influenz kennen zu lernen, denken wir uns in der Nähe eines mit Elektricität in beliebiger Weise geladenen Nichtleiters einen mit Elektricität geladenen oder nicht geladenen übrigens vollständig isolirten Leiter. Wäre die an dem Nichtleiter haftende Elektricität nicht vorhanden, so würde sich die Elektricität des Leiters nach Massgabe des vorhergehenden Paragraphen und immer so anordnen, dass ihre Potentialfunction für alle Punkte auf und im Leiter constant wäre. Ist nun aber die Elektricität des Nichtleiters gemäss ihrer Potentialfunction wirksam, so muss nach I, §. 3. die Elektricität des Leiters sich so anordnen, dass ihre Potentialfunction vermehrt um die Potentialfunction der Elektricität des Nichtleiters, für alle Punkte des Leiters einen constanten Werth hat, eine Bedingung, die nach 1) §. 4. oder 5) §. 4. auch noch etwas einfacher ausgesprochen werden kann. Da nun die Potentialfunction der Elektricität des Nichtleiters immer ihrem absoluten Werthe nach für die nähergelegenen Punkte des Leiters grösser ist als für die entfernteren Punkte, so muss umgekehrt die auf dem Leiter befindliche Elektricität sich so anordnen, dass ihre Potentialfunction dem absoluten Werthe nach für die dem Nichtleiter näher gelegenen Punkte kleiner ist als für die entfernteren Punkte; diess geschieht aber dadurch, dass, wenn auf dem ganzen Leiter die Elektricität allenthalben dasselbe Vorzeichen hat, ihre Diehtheit absolut genommen grösser ist an den dem Nichtleiter abgewendeten, kleiner an den demselben zugewendeten Stellen; wenn das Vorzeichen verschieden ist, an den dem Nichtleiter abgewendeten Stellen die elektrische Dichtheit dasselbe Vorzeichen besitzt, wie das der Gesammtmasse des Nichtleiters ist,

das entgegengesetzte an den dem Nichtleiter zugewendeten Stellen.

Der letztere Fall muss immer eintreten, wenn dem Leiter ursprünglich gar keine Elektricität mitgetheilt wurde und zugleich muss nach dem Satze 3) §. 1. die absolute Menge der positiven Elektricität so gross sein als die der negativen. Entfernt man wieder die auf dem Nichtleiter haftende Elektricität, so treten wieder dieselben Gleichgewichtsbedingungen ein, als ob der Leiter allein vorhanden wäre, er muss also, wenn er vorher nicht geladen war, wiederum ganz frei von Elektricität sein, wenn er aber geladen war, wiederum dieselbe Anordnung der Elektricität zeigen, als ob die Elektricität des Nichtleiters nie vorhanden gewesen wäre.

Vergrössert man den unter der Influenz der Elektricität des Nichtleiters stehenden Leiter, indem man ihn mit andern ungeladenen Leitern in Berührung bringt, so geht auch auf diese angelegten Leiter die Elektricität nach 3) §. 4. mit über. Ueber das Vorzeichen der auf dem angesetzten Leiter befindlichen Elektricität gilt dasselbe, was die vorhergehende Betrachtung ergeben würde, wenn von vorn herein nicht der Leiter allein, sondern der Leiter zugleich mit dem angesetzten Leiterstück in unveränderlicher Lage verbunden dem Experimente unterworfen worden wäre. Trennt man, während noch die Elektricität des Nichtleiters wirksam ist, das angesetzte Leiterstück wieder ab, so ist nicht nöthig, dass sich auf ihm wiederum wie vor dem Ansetzen der neutrale Zustand vorfinde, immer aber muss die Gesammtsumme der auf dem Leiter und dem losgetrennten Leiterstück vorhandenen Elektricität übereinstimmen mit der Gesammtsumme der vor der Influenz auf dem Leiter vorhandenen Elektricität.

Befinden sich nach dem Ansetzen des Leiterstückes auf dem dadurch entstandenen ganzen Leiter beide Elektricitäten, so muss nach Wegnahme des angesetzten Leiterstückes auf diesem sich die mit der Gesammtsumme der Elektricität des Nichtleiters gleichnamige Elektricität im Allgemeinen vorfinden, wenn das angesetzte Leiterstück sich vorwiegend nach der dem Nichtleiter abgewendeten Seite erstreckte, dagegen

die damit ungleichnamige, wenn das angesetzte Leiterstück sich vorwiegend nach dem Nichtleiter hin erstreckte.

Offenbar können im allgemeinen Falle die eben erlangten Resultate nicht unbedingte Gültigkeit beanspruchen, weil nur eine besondere mathematische Untersuchung eines jeden gegebenen speciellen Falles über die eben genannten Erscheinungen präcisen Aufschluss geben kann.

Man erkennt aber wenigstens soviel, dass im Allgemeinen durch das angesetzte Leiterstück beide Elektricitäten abgeleitet werden können, wenn sie der influenzirte Leiter zeigte, dass also auch das in manchen Lehrbüchern der Experimentalphysik Behauptete, man könne nur die mit der influenzirenden Gesammtmasse gleichnamige Elektricität ableiten, im Allgemeinen falsch ist.

Findet die Ableitung, anstatt bloss durch ein angesetztes Leiterstück, zur Erde statt, so muss der Werth der Potentialfunction aller vorhandenen Elektricität für alle Punkte des ganzen Leiters und der zur Ableitung dienenden Leiterstücke Null betragen. Dieser Forderung kann man, und muss man, weil es nur eine einzige Vertheilung der Elektricität im Gleichgewichtszustande auf Leitern giebt, genügen, indem man über die ganze Oberfläche des Leiters und dem zur Ableitung dienenden Leiterstücke Elektricität verbreitet, die das entgegengesetzte Vorzeichen zu der Gesammtsumme der Elektricität des Nichtleiters besitzt. Der experimentelle Satz, dass man nur die der influenzirenden Elektricität gleichnamige ableiten könne, gilt also streng nur und immer von der Ableitung zur Erde.

Wenn es möglich ist, und in der That ist die Möglichkeit innerhalb gewisser Grenzen vorhanden, den zur Erde abgeleiteten influenzirten Leiter wieder zu isoliren und seine Elektricität in einem Reservoir zu sammeln, so hat man in der ebengenannten elektrischen Erscheinung ein anscheinend unerschöpfliches Mittel, vermittels einer gegebenen Elektricitätsmenge, nämlich der influenzirenden, beliebig grosse Elektricitätsquanten des entgegengesetzten Vorzeichens zu erzeugen. Man hat hierzu nur nöthig, das einmal besprochene Experiment gehörig oft zu wiederholen.

Es ist nach dem Gesagten leicht ersichtlich, wie sich

die Erscheinungen gestalten müssen, wenn nicht bloss eine influenzirende elektrische Masse, sondern mehrere und wenn nicht bloss ein influenzirter Leiter, sondern mehrere zu berücksichtigen sind, so lange nur die Influenz der auf den Nichtleitern haftenden Elektricitäten in Rechnung gezogen werden soll.

Um über die Influenz zwischen auf Leitern haftenden Elektricitäten urtheilen zu können, bedürfen wir erst noch einiger genauerer mathematischer Betrachtungen, zu denen wir uns jetzt wenden wollen.

Wenn irgend ein Leiter der Influenz einer elektrischen Masse ausgesetzt ist, so muss der constante Werth, den die Potentialfunction aller vorhandenen elektrischen Massen für alle Punkte des Leiters hat, ein anderer sein, als er sein würde, wenn der Leiter allein mit seiner ihm unmittelbar mitgetheilten Elektricität vorhanden wäre. Ist aber die Vertheilung der Elektricität im letzteren Falle bekannt, so ist es nach dem vorigen Paragraphen sehr leicht, die elektrische Vertheilung anzugeben, wenn der Werth der constanten Potentialfunction der ist, wie er bei stattfindender Influenz gilt. Wir denken uns die Bestimmung dieser letzteren Elektricitätsvertheilung vollbracht und dann kann die Wirkung der Influenz nur so in Rechnung gezogen werden, dass wir über den Leiter eine neue elektrische Ladung verbreiten derart, dass die Potentialfunction dieser neuen Ladung und der influenzirenden Elektricitätsmenge für alle Punkte des Leiters der Null gleich ist.

Erfüllen wir die elektrischen Gleichgewichtsbedingungen I, §. 3. in der eben genannten Weise, so kommt für die Berechnung der Influenz die Hauptschwierigkeit darauf hinaus, die Influenzelektricität auf einem Leiter zu bestimmen, wenn die Potentialfunction dieser und der influenzirenden Elektricität für alle Punkte des Leiters Null sein soll; oder was dasselbe ist, die Influenzelektricität auf einem zur Erde abgeleiteten Leiter zu bestimmen. Zu dieser Art von Aufgaben wenden wir uns jetzt speciell.

Es sei σ die Oberfläche eines zur Erde abgeleiteten Leiters, P ein Punkt ausserhalb der Fläche σ, in welchem sich die Elektricitätsmenge μ befindet und um welchen als

Mittelpunkt die Kugelfläche σ' beschrieben ist, endlich sei σ'' die Oberfläche einer Kugel, die die beiden Flächen σ und σ' vollständig umschliesst und deren Mittelpunkt irgend wo im Endlichen liegt. Die drei genannten Flächen umschliessen vollständig einen Raum, dessen Oberfläche wir kurz mit Σ bezeichnen wollen. Wir wenden auf diesen Raum den Green'schen Satz II, §. 4. Cap. I. an, nämlich

$$\int (V \Delta U - U \Delta V)\, dk + \int \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma = 0,$$

wobei V die Potentialfunction der so über den isolirten Leiter verbreiteten Elektricität bedeutet, dass der für alle Punkte des Leiters constante Werth V soviel beträgt, als er betragen müsste, wenn die Influenz des Punktes P stattfände; $U = \frac{\mu}{r} + U'$ sei die Potentialfunction der in P vorhandenen Elektricitätsmenge μ, gleich $\frac{\mu}{r}$ und der durch P auf dem abgeleiteten Leiter influenzirten Elektricität, gleich U'.

Für den ganzen Raum, über welchen sich das erste Integral der vorigen Gleichung zu erstrecken hat, ist demzufolge $\Delta V = \Delta U = 0$ und das erste Integral verschwindet auch dann noch, wie die Betrachtungen des §. 4. Cap. I. lehren, wenn wir den Radius der um P beschriebenen Kugel unendlich abnehmen lassen. Es besteht daher für unseren Raum die Gleichung:

$$\int \left[\left(\frac{\mu}{r} + U' \right) \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial \left(\frac{\mu}{r} + U' \right)}{\partial n} \right] d\Sigma = 0.$$

Lassen wir, wie es erlaubt ist, den Radius der Kugelfläche σ'' ins Unendliche wachsen, so verschwindet im Bezug auf die Punkte von σ'' sowohl $\frac{\mu}{r} + U'$ wie auch V und von obigem Integrale bleibt allein übrig

$$\int \left[\left(\frac{\mu}{r} + U' \right) \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial \left(\frac{\mu}{r} + U' \right)}{\partial n} \right] d\sigma$$
$$+ \int \left[\left(\frac{\mu}{r} + U' \right) \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial \left(\frac{\mu}{r} + U' \right)}{\partial n'} \right] d\sigma' = 0.$$

Lassen wir ferner in dieser Gleichung den Radius der

Kugelfläche σ' ins Unbegrenzte abnehmen, so verschwindet von dem auf die Kugelfläche σ' bezüglichen Integrale der Theil

$$\int\left[\left(\frac{\mu}{r}+U'\right)\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial U'}{\partial n}\right]d\sigma'$$

und es bleibt von dem auf die Kugelfläche σ' bezüglichen Integrale allein übrig

$$\int - V\frac{\partial\frac{\mu}{r}}{\partial n}\,d\sigma = 4\pi\mu V',$$

wenn V' bezeichnet den Werth von V im Punkte P.

Die obige Gleichung reducirt sich daher auf die folgende:

$$1,\quad 4\pi\mu V' + \int\left[\left(\frac{\mu}{r}+U'\right)\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial\left(\frac{\mu}{r}+U'\right)}{\partial n}\right]d\sigma = 0.$$

Für alle Punkte der Fläche σ ist aber

$$\frac{\mu}{r}+U' = 0.$$

$$V = \text{Const.}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\mu}{r}+U'\right)}{\partial n} = -4\pi\varrho_0,$$

wenn ϱ_0 bezeichnet die Dichtheit der durch die im Punkte P vorhandene elektrische Masse $= \mu$ auf dem zur Erde abgeleiteten Leiter influenzirten Elektricität.

Die vorige Gleichung kann demnach einfach geschrieben werden in der Form:

$$4\pi\mu V' + 4\pi V\int\varrho_0\,d\sigma = 0.$$

Nennen wir μ_0 die gesammte auf dem zur Erde abgeleiteten Leiter influenzirte Elektricität, so entsteht aus der vorigen Gleichung einfach

$$\mu V' = -\mu_0 V.$$

Oder

$$\text{I},\quad \mu_0 : \mu = V' : -V.$$

Aus diesem Resultate ziehen wir, wenn wir zugleich das in den allgemeinen vorausgehenden Bemerkungen dieses Paragraphen enthaltene mit berücksichtigen, folgende Sätze:

1) Die Influenzelektricität einer in einem Raumelemente ausserhalb eines zur Erde durch einen unendlich dünnen Draht abgeleiteten Leiters hat allenthalben auf dem Leiter das entgegengesetzte Vorzeichen wie die influenzirende Elektricitätsmenge und kein Oberflächentheil des Leiters bleibt frei von Influenzelektricität.

2) Die absolute Menge der Influenzelektricität auf einem durch einen verschwindend dünnen Draht zur Erde abgeleiteten Leiter, hervorgerufen durch eine gewisse Elektricitätsmenge in einem Raumelemente ausserhalb des Leiters, verhält sich zu dieser letzteren absoluten Elektricitätsmenge umgekehrt wie der Werth der Potentialfunction irgend einer über dem isolirten Leiter im Gleichgewichtszustande verbreiteten elektrischen Ladung für irgend einen Punkt des Leiters zu dem Werthe derselben Potentialfunction für das Raumelement, in welchem sich die influenzirende Masse befindet.

Aus dem letzten Satze folgt noch:

Unter denselben Voraussetzungen ist die absolute Menge der Influenzelektricität immer geringer als die der influenzirenden. Nur wenn die influenzirende Elektricität auf der Oberfläche des Leiters selbst liegt, ist die absolute Menge der Influenzelektricität gleich der absoluten Menge der influenzirenden. Rückt die influenzirende Elektricität in unendliche Entfernung vom Leiter, so ist die Menge der Influenzelektricität gleich Null und es befindet sich auf dem Leiter gar keine Elektricität.

Unter denselben Voraussetzungen ändert sich die Menge der Influenzelektricität nicht, wenn sich die influenzirende Masse auf einer

Niveaufäche fortbewegt, die zur Potentialfunction V gehört.

3) Die Menge der von der Influenz über den isolirten Leiter nach den elektrischen Gleichgewichtsbedingungen zu verbreitenden Elektricität besteht aus der dem Leiter direct in Wirklichkeit mitgetheilten Elektricität und der Menge $-\mu$, wenn μ bezeichnet die Gesammtmenge der unter den vorigen Voraussetzungen auf dem Leiter erregten Influenzelektricität.

Es ist nicht schwer das unter I, erlangte Resultat auch auf den Fall zu erweitern, wenn die influenzirende Elektricität stetig gewisse Räume oder Flächen ausserhalb des der Influenz ausgesetzten Leiters erfüllt. Bezeichnet nämlich dQ_0 die von dem Elektricitätselement dQ erzeugte Menge von Influenzelektricität auf dem durch einen verschwindend dünnen Draht zur Erde abgeleiteten Leiter, ist ferner V der Werth der Potentialfunction irgend einer auf dem isolirten Leiter im Gleichgewicht befindlichen elektrischen Ladung für irgend einen Punkt, V' der Werth dieser Potentialfunction in dem Punkte des Raumes, wo sich die elektrische Masse dQ befindet, so ist nach I,

$$dQ_0 = -\frac{V'}{V}\,dQ,$$

und die gesammte von der ganzen influenzirenden Elektricität bewirkte Influenzelektricität ist

$$Q_0 = -\int\frac{V'}{V}\,dQ = -\frac{1}{V}\int V'\,dQ.$$

Da $\frac{V'}{V}$ ein positiver Werth ist, der höchstens gleich der Einheit sein kann, so folgt:

Die von einem Elektricitätsquantum ausserhalb eines durch einen verschwindend dünnen Draht zur Erde abgeleiteten Leiters auf dem Leiter erzeugte Influenzelektricität ist ihrer absoluten Menge nach immer kleiner als die influenzirende Gesammtmenge, wenn die einzelnen Theile

der letzteren durchgängig einerlei Elektricitätsart besitzen, ist diess aber nicht der Fall, so gilt das eben Gesagte wenigstens von den Elektricitäten mit gleichem Vorzeichen für sich besonders.

Ist der Leiter eine Kugel vom Radius R, so ist nach §. 3., Cap. I.

$$V' = \frac{M}{r}, \; V = \frac{M}{R}$$

folglich

$$Q_0 = -\int \frac{R}{r}\, dQ = -R\int \frac{dQ}{r}.$$

Bezeichnet V_0 die Potentialfunction der influenzirenden Elektricität im Mittelpunkte der Kugel, so ist

$$V_0 = \int \frac{dQ}{r}$$

folglich

$$Q_0 = -RV_0.$$

In diesem Resultate bietet sich ein einfaches Mittel dar, die Potentialfunction irgend einer an Nichtleitern haftenden Elektricitätsmenge für beliebige Punkte des Raumes zu bestimmen. Es wird dieses Resultat namentlich dann wichtig, wenn es sich um die Bestimmung der Potentialfunction grösserer elektrischer Massen in grösserer Entfernung handelt, selbst wenn die elektrischen Massen auf leitenden Substanzen haften, weil man alsdann die Rückwirkung der auf der Kugel befindlichen Influenzelektricität auf die influenzirende vernachlässigen kann. Es tritt diess z. B. ein bei Untersuchungen über atmosphärische und Wolken-Elektricität.

Wir betrachten nun speciell den Fall, dass die influenzirenden elektrischen Massen von dem Leiter wie von einer Schale umschlossen werden, während der Leiter selbst zur Erde abgeleitet ist.

Da jetzt für alle Punkte des Leiters die Gesammtpotentialfunction aller vorhandenen Elektricität den Werth Null besitzt, so folgt, nach §. 9. Cap. I., dass auch dieser Werth Null der Gesammtpotentialfunction für alle Punkte ausserhalb des Leiters gilt, für diese also sich die Sache

gerade so verhält, als ob gar keine Elektricität vorhanden wäre. Angenähert wird dasselbe Resultat erreicht, wenn vor einen mit Elektricität geladenen Körper ein zur Erde abgeleiteter Schirm gestellt wird. Hierauf beruht das, was man in der Experimentalphysik mit dem Namen des Abschirmens der Elektricität belegt.

Man kann weiter nachweisen, dass auf der äussern Begrenzungsfläche des Leiters gar keine Elektricität vorhanden sein kann. Nimmt man nämlich irgend eine geschlossene Fläche, die zum Theil in die innere Masse des Leiters, aber nicht in dessen Hohlraum und zugleich in den ausserhalb des Leiters gelegenen Raum eingreift, und bezieht man auf diese Fläche den Gaussischen Satz §. 3. Cap. I.,

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = -4\pi Q,$$

so folgt, weil $\frac{\partial V}{\partial n}$ allenthalben der Null gleich ist, dass auch an allen Punkten der äussern Oberfläche des abgeleiteten Leiters sich gar keine Elektricität vorfinden kann.

Endlich folgt aus §. 9. Cap. I., dass auch die Gesammtmasse aller auf der innern (Höhlen-)Fläche und im innern Hohlraume befindlichen Elektricität verschwinden muss, dass also auch die Gesammtmenge der Influenzelektricität gleich ist der Gesammtmenge der influenzirenden Elektricität, jedoch entgegengesetzten Vorzeichens.

Man kann das letztere Resultat auch noch leicht mittels des Green'schen Lehrsatzes in der Art nachweisen, wie derselbe im vorigen Fall, wo die influenzirenden elektrischen Massen ausserhalb des Leiters lagen, angewendet wurde. Lässt man nämlich jetzt die frühere Fläche σ bestehen aus der innern σ_1 und aus der äussern σ_2 Begrenzungsfläche, so ergiebt die frühere Gleichung 1, für den jetzigen Fall

$$4\mu\pi V' + \int \left[\left(\frac{\mu}{r} + U'\right) \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial \left(\frac{\mu}{r} + U'\right)}{\partial n} \right] d\sigma_1$$
$$+ \int \left[\left(\frac{\mu}{r} + U'\right) \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial \left(\frac{\mu}{r} + U'\right)}{\partial n} \right] d\sigma_2 = 0.$$

Das zweite der beiden Integrale linker Hand verschwin-

det aber, weil für die Fläche σ_2 sowohl $\frac{\mu}{r} + U'$ als auch $\frac{\partial\left(\frac{\mu}{r} + U'\right)}{\partial n}$ verschwindet; das gleiche gilt für die Fläche σ_1 auch von $\frac{\mu}{r} + U'$. Von der vorigen Gleichung bleibt also allein übrig

$$2, \quad 4\mu\pi V' + \int - V \frac{\partial\left(\frac{\mu}{r} + U'\right)}{\partial n} d\sigma_1 = 0.$$

Ist nun die Dichtheit der Influenzelektricität ϱ_0', so ist $\frac{\partial\left(\frac{\mu}{r} + U'\right)}{\partial n} = -4\pi\varrho_0'$ unter dem Integralzeichen zu setzen. Da ferner V nach seiner Bedeutung für alle Punkte auf σ_1 denselben constanten Werth hat, und diesen Werth auch für alle Punkte innerhalb σ_1 nach §. 9. Cap. I. beibehält, so ist auch $V' = V$, dividirt man also in der vorigen Gleichung noch den constanten Factor $4\pi V' = 4\pi V$ hinweg, so entsteht

$$\int \varrho_0' \, d\sigma_1 = -\mu,$$

welche Gleichung genau das vorige Resultat ausdrückt, wenn eine punktförmige Masse influenzirend wirkt; es ist aber leicht ersichtlich, dass sich nichts Wesentliches am Resultate ändert, wenn überhaupt elektrische Massen influenzirend wirken.

Ist der umschliessende Leiter nicht abgeleitet, so findet sich nach dem, was oben im Anfange dieses §. allgemein über die Bestimmung der Influenzelektricität gesagt wurde, auf der äussern Oberfläche die dem umschliessenden Leiter direkt mitgetheilte Elektricitätsmenge, vermehrt um die der influenzirenden Elektricität; auf der innern diese letztere allein, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen. Hieraus ergiebt sich ein bereits von Poisson[1]) gefundenes Resultat, dass eine isolirte leitende Hohlkugel, in deren innerem Raume sich influenzirende elektrische Massen befinden, nach aussen hin gerade so wirke, als ob sämmtliche vorhandenen elektrischen Massen im Kugelmittelpunkte vereinigt wären, gleich-

1) Annales de Chimie et de phys. 25. 128.

gültig, wie die influenzirenden elektrischen Massen im Innern angeordnet sein mögen. Es verschwindet nämlich die äussere Potentialfunction der influenzirenden elektrischen Massen und der auf der innern Kugelfläche erregten Influenzelektricität, während sich auf der äussern Kugelfläche die der Kugelfläche direkt mitgetheilte Elektricitätsmenge und eine den influenzirenden elektrischen Massen gleiche Elektricitätsmenge mit gleichförmiger Dichtheit vertheilt. Weiter können wir folgern, dass, wenn die äussere Begrenzungsfläche eine beliebige andere Fläche ist, sie nach aussen hin gerade so wirkt, als ob auf ihr die gesammte den innern influenzirenden Massen und ihr selbst ursprünglich mitgetheilte Elektricitätsmenge auf der äussern Fläche allein und zwar so wie es der Gleichgewichtszustand auf ihr allein verlangen würde, vorhanden wäre, gleichgültig, wie die elektrischen Massen im Innern angeordnet sein mögen.

Es ist hier der Ort, eines von G. Green gefundenen Satzes zu gedenken, der wie folgt ausgesprochen werden kann:

Wenn σ irgend eine zur Erde abgeleitete, geschlossene Fläche ist, die die Elektricität vollkommen leitet und wenn p ein Punkt im Innern des von der Fläche σ umschlossenen Raumes ist, in welchem die Elektricitätsmenge Q angehäuft ist, so wird p eine gewisse elektrische Vertheilung auf σ hervorrufen, deren Potentialfunction im Bezug auf den Punkt p', der ebenfalls im Innern des von der Fläche σ umschlossenen Raumes liegt, V sein soll; dann ist V eine solche Function des Ortes von p und p', dass sie sich nicht ändert, wenn die Punkte p und p' gegenseitig verwechselt werden. Gleiches gilt, wenn die beiden Punkte p und p' ausserhalb der Fläche σ liegen oder ausserhalb eines Systemes von geschlossenen Flächen.

Um diesen Satz von Green nachzuweisen, können wir ausgehen von den Gleichungen 1, und 2, indem wir in der letzteren Gleichung statt σ_1 σ setzen.

Bezeichnet nämlich zunächst V den Werth der Potentialfunction der vom Punkte p erregten Influenzelektricität für den Punkt p', so ist nach den Gleichungen 1, und 2,

$$\text{A,} \qquad V = -\int \varrho_0 V_\sigma d\sigma,$$

wenn ϱ_0 die Dichtheit der Influenzelektricität bezeichnet, die im Flächenelement $d\sigma$ erregt wird, wenn im Punkte p' die Elektricitätsmenge $+1$ vorhanden wäre und die Fläche σ durch einen unendlich dünnen Draht mit der Erde in leitender Verbindung stünde. V_σ ist der Werth der Potentialfunction V im Flächenelement $d\sigma$ oder auch der Werth, den V annimmt, wenn der Punkt p' unendlich nahe an das Flächenelement $d\sigma$ heranrückt.

Ist ferner r der Abstand des Punktes p von irgend einem Punkte der Fläche σ, so ist auch

$$\frac{Q}{r} + V_\sigma = \beta = \text{Const.}$$

Durch direkte Differentiation überzeugt man sich leicht, dass $\Delta \frac{Q}{r} = 0$, daher folgt aus der vorigen Gleichung auch

$$\Delta V_\sigma = 0,$$

man kann daher auch setzen

$$\text{B,}\quad V_\sigma = -\int \varrho_0' V_\sigma' d\sigma',$$

wenn ϱ_0' bezeichnet die Dichtheit der Influenzelektricität, die auf der durch einen unendlich dünnen Draht zur Erde abgeleiteten Fläche σ hervorgerufen wird durch den mit der Elektricitätsmenge $+1$ versehenen Punkt p, der unendlich nahe an die Fläche σ herantritt. V_σ' bedeutet den Werth, den V_σ erhält, wenn der Punkt p unendlich nahe an das Flächenelement $d\sigma'$ herantritt. Durch Einsetzen des Werthes von V_σ aus der Gleichung B, in die Gleichung A, entsteht

$$V = \int\int \varrho_0 \varrho_0' V_\sigma' d\sigma d\sigma'.$$

Wiederholt man dieselbe Betrachtung, indem man die Rollen der beiden Punkte vertauscht, so entsteht

$$V' = \int\int \varrho_0' \varrho_0 V_\sigma'' d\sigma' d\sigma.$$

In den beiden letzten Gleichungen erstrecken sich allemal beide Integrationen über die Fläche σ, ebenso stimmen die gleichbezeichneten Functionen ϱ_0 und ϱ_0' überein, ferner ist V_σ' das, was aus V wird, wenn erst der mit der elektrischen positiven Masseneinheit versehene Punkt p' an $d\sigma$, dann der mit der gleichen Elektricitätsmenge versehene

Punkt p unendlich nahe an $d\sigma'$ herantritt, V_σ'' das, was aus V' wird, wenn die eben genannten beiden Punkte p und p' und die Flächenelemente $d\sigma$ und $d\sigma'$ mit einander vertauscht werden. Hieraus folgt aber, dass

$$V_\sigma' = V_\sigma'';$$

demnach ist auch

$$V' = V'',$$

wodurch der an die Spitze gestellte Satz bewiesen ist.

Wir[1]) wenden uns nun zur Influenzelektricität zwischen vollkommen die Elektricität leitenden Körpern und betrachten zunächst den einfachsten Fall, dass nur zwei elektrische Leiter I. und II. mit einander in Wirksamkeit treten. Es seien nach Eintritt des Gleichgewichtes die constanten Werthe der Potentialfunction in beiden Leitern α_1 und α_2, die diesen constanten Werthen der Potentialfunction entsprechenden Dichtheiten der Elektricitäten, wenn die Leiter isolirt, also ohne gegenseitige Einwirkung aufgestellt wären, ϱ_1^0 und ϱ_2^0. Wir denken uns jetzt den Leiter II. durch einen verschwindend dünnen Draht zur Erde abgeleitet und in die vorausgesetzte Wirkungssphäre von I. gestellt. Hierdurch wird auf dem Leiter II. die Influenzelektricität mit der Dichtheit ϱ_2^1 erzeugt, während der constante Werth der Potentialfunction der elektrischen Massen mit den Dichtheiten ϱ_1^0 und ϱ_2^1 auf den Leitern I. und II. für alle Punkte des Leiters II. Null beträgt. Wir denken uns ferner den Leiter II. mit seiner ursprünglichen elektrischen Dichtheit ϱ_2^0 auf den zur Erde abgeleiteten Leiter I. wirkend, die Dichtheit der hervorgerufenen Influenzelektricität sei ϱ_1^1, während der constante Werth der Potentialfunction von den Elektricitäten mit den Dichtheiten ϱ_2^0 und ϱ_1^1 auf den Leitern II. und I. für alle Punkte des Leiters I. Null beträgt. Wir denken uns jetzt die Reihenfolge der eben genannten Experimente wiederholt, indem wir als Elektricitäten, die ursprünglich auf den Leitern vorhanden sind, die mit den Dichtheiten ϱ_1^1 und ϱ_2^1 auf den Leitern I. und II. annehmen; die Dicht-

1) Das Wesentliche der nachfolgenden Betrachtungen gab zuerst Murphy in Elementary principles of the theories of electricity heat and molecular actions. Part I. p. 93. Cambridge, 1833.

heiten der neuen Influenzelektricitäten auf denselben beiden Leitern seien der Reihe nach ϱ_1^2 und ϱ_2^2. Es mögen die Versuche beliebig oft wiederholt werden, so dass nach der $n$ten Versuchsreihe überhaupt auf den Leitern Elektricitätsmengen gewesen sind mit den Dichtheiten.

Auf dem Leiter I.: $\varrho_1^0, \varrho_1^1, \varrho_1^2, \varrho_1^3, \ldots . \varrho_1^n$.
" " " II.: $\varrho_2^0, \varrho_2^1, \varrho_2^2, \varrho_2^3, \ldots . \varrho_2^n$.

Bezeichnet nun allgemein V_n^p die von der Elektricität mit der Dichtheit ϱ_n^p herkommende Potentialfunction, so ist die Gesammtpotentialfunction aller vorhandenen elektrischen Massen für den

Leiter I.	Leiter II.
V_1^0	V_2^0
$+ V_2^0 + V_1^1$	$+ V_1^0 + V_2^1$
$+ V_2^1 + V_1^2$	$+ V_1^1 + V_2^2$
$+ \ldots\ldots$	$+ \ldots\ldots$
$+ V_2^{n-1} + V_1^n$	$+ V_1^{n-1} + V_2^n$
$+ V_2^n$	$+ V_1^n$.

In diesen beiden Summen verschwinden aber immer je zwei in derselben Horizontalreihe stehende Summanden, so dass als Gesammtpotentialfunction für einen Punkt des Leiters I. allein übrig bleibt $V_1^0 + V_2^n$, für einen Punkt des Leiters II. $V_2^0 + V_1^n$. Bezeichnen wir nun weiter die Elektricitätsmenge, die allgemein die Potentialfunction V_r^s entstehen lässt mit $p_r^s - q_r^s$, wo p_r^s die gesammte positive, q_r^s die gesammte negative Elektricität bezeichnet, so ist nach einem der letzten Sätze dieses Paragraphen dem absoluten Werthe nach

$$3, \begin{cases} p_1^0 > q_2^1 > p_1^2 > q_2^3 > p_1^4 > \ldots . > \begin{matrix} q_2^n & \text{wenn } n \text{ ungerade} \\ p_1^n & \text{,, } n \text{ gerade} \end{matrix} \\ p_2^0 > q_1^1 > p_2^2 > q_1^3 > p_2^4 > \ldots . > \begin{matrix} p_2^n & \text{,, ,, ,,} \\ q_1^n & \text{,, ,, ungerade} \end{matrix} \\ q_1^0 > p_2^1 > q_1^2 > p_2^3 > q_1^4 > \ldots . > \begin{matrix} p_2^n & \text{,, ,, ,,} \\ q_1^n & \text{,, ,, gerade} \end{matrix} \\ q_2^0 > p_1^1 > q_2^2 > p_1^3 > q_2^4 > \ldots . > \begin{matrix} q_2^n & \text{,, ,, ,,} \\ p_1^n & \text{,, ,, ungerade.} \end{matrix} \end{cases}$$

Wir ziehen hieraus das Resultat, es ist, dem absoluten Werthe nach

$$p_1^0 > p_1^2 > p_1^4 > \ldots\ldots > p_1^{2m} > \ldots\ldots$$
$$q_1^0 > q_1^2 > q_1^4 > \ldots\ldots > q_1^{2m} > \ldots\ldots$$
$$p_2^0 > p_2^2 > p_2^4 > \ldots\ldots > p_2^{2m} > \ldots\ldots$$
$$q_2^0 > q_2^2 > q_2^4 > \ldots\ldots > q_2^{2m} > \ldots\ldots$$
$$p_1^1 > p_1^3 > \ldots\ldots > p_1^{2m+1} > \ldots\ldots$$
$$q_1^1 > q_1^3 > \ldots\ldots > q_1^{2m+1} > \ldots\ldots$$
$$p_2^1 > p_2^3 > \ldots\ldots > p^{2m+1} > \ldots\ldots$$
$$q_2^1 > q_2^3 > \ldots\ldots > q^{2m+1} > \ldots\ldots$$

Zugleich finden die letzteren 8 vielfachen Ungleichungen in der Art statt, dass nach dem eben citirten Satze jedes folgende Glied nur einen Bruchtheil des vorhergehenden bildet, wie weit man auch die Ungleichungen fortsetzen mag und es wird dieser Bruchtheil nie gleich der Einheit. Es müssen sich also die Werthe der p und q mit wachsendem oberen Index der Null nähern, dasselbe müssen auch die von ihnen herkommenden Potentialfunctionen thun, folglich ist

$$\lim_{n=\infty} V_1^n = 0, \quad \lim_{n=\infty} V_2^n = 0.$$

Lassen wir also die Anzahl der oben genannten Versuchsreihen ins Unendliche wachsen, so bleibt von den Gesammtpotentialfunctionen aller auf den Leitern befindlich gewesenen Elektricitäten allein übrig

für den Leiter I. $V_1^0 = \alpha_1$; für den Leiter II. $V_2^0 = \alpha_2$;

und damit sind die Bedingungen für das elektrische Gleichgewicht erfüllt.

Setzen wir

$$
\begin{aligned}
{}_2P_1 &= p_1^0 + p_1^2 + p_1^4 + p_1^6 + \ldots\ldots \\
{}_1P_1 &= \quad p_1^1 + p_1^3 + p_1^5 + p_1^7 + \ldots\ldots \\
{}_2P_2 &= p_2^0 + p_2^2 + p_2^4 + p_2^6 + \ldots\ldots \\
{}_1P_2 &= \quad p_2^1 + p_2^3 + p_2^5 + p_2^7 + \ldots\ldots \\
{}_2Q_1 &= q_1^0 + q_1^2 + q_1^4 + q_1^6 + \ldots\ldots \\
{}_1Q_1 &= \quad q_1^1 + q_1^3 + q_1^5 + q_1^7 + \ldots\ldots \\
{}_2Q_2 &= q_2^0 + q_2^2 + q_2^4 + q_2^6 + \ldots\ldots \\
{}_1Q_2 &= \quad q_2^1 + q_2^3 + q_2^5 + q_2^7 + \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

so bilden die Werthe der einzelnen P und Q unendliche Reihen, deren Convergenz noch stärker ist als die einer gewöhnlichen geometrischen Reihe.

Die Gesammtmenge der auf den beiden Leitern vorhandenen Elektricitäten beträgt nun und zwar

auf dem Leiter I. ${}_2P_1 + {}_1P_1 + {}_2Q_1 + {}_1Q_1$
auf dem Leiter II. ${}_2P_2 + {}_1P_2 + {}_2Q_2 + {}_1Q_2$

und es bedeuten die mit P bezeichneten Elektricitätsmengen positive Elektricität, die mit Q bezeichneten negative.

Von den genannten 8 Elektricitätsmengen der P und Q verschwinden aber allemal je 4. Da nämlich nach dem ersten Lehrsatz in §. 5. von den vier Grössen p_1^0, q_1^0, p_2^0 und q_2^0 zwei verschwinden müssen, so folgt, dass von den 4 vielfachen Ungleichungen 3, nur zwei bestehen bleiben, indem sämmtliche Glieder der beiden anderen der Null gleich sind. Aus den beiden bestehenden Ungleichungen folgt dann das eben Behauptete, indem nur 4 der mit P und Q bezeichneten Reihensummen nicht verschwindende Werthe haben. Diese sind, wenn

$$4, \left\{\begin{array}{llll} p_1^0 > 0 & \text{und} & p_2^0 > 0; & {}_2P_1,\ {}_1Q_1,\ {}_2P_2,\ {}_1Q_2 \\ p_1^0 > 0 & ,, & -q_2^0 > 0; & {}_2P_1,\ {}_1P_1,\ {}_1Q_2,\ {}_2Q_2 \\ -q_1^0 > 0 & ,, & p_2^0 > 0; & {}_2Q_1,\ {}_1Q_1,\ {}_2P_2,\ {}_1P_2 \\ -q_1^0 > 0 & ,, & -q_2^0 > 0; & {}_2Q_1,\ {}_1P_1,\ {}_2Q_2,\ {}_1P_2. \end{array}\right.$$

Aus dem, was in §. 5. über den Zusammenhang zwischen dem Werth der Constanten α und der Dichtheit der Elektricität gesagt wurde, folgt weiter, dass auch ${}_2P_1$ oder ${}_2Q_1$ desselben Vorzeichens ist, wie α_1; ${}_2P_2$ oder ${}_2Q_2$ desselben wie α_2 und zugleich sind nach der Gleichung I. und den vielfachen Ungleichungen 3, dieses Paragraphen ${}_2P_1$ oder ${}_2Q_1$ proportional mit α_1, ${}_2P_2$ und ${}_2Q_2$ proportional mit α_2 und dieselben Grundlagen unserer Betrachtung lehren auch, dass die mit ungeradem linken Index versehenen P oder Q proportional und entgegengesetzten Vorzeichens zu der Constanten α des andern Leiters sind, als worauf diese Elektricitätsmengen selbst haften.

Man erkennt hieraus und aus den Resultaten 4, dass die beiden einander influenzirenden Leiter mit durchaus gleichartiger Elektricität überdeckt sind, wenn die ihnen zukommenden Constanten α entgegengesetzten Vorzeichens sind, und dass das Vorzeichen der Elektricität eines jeden

Leiters übereinstimmt mit dem der demselben Leiter zukommenden Constanten α.

Von den oben genannten Reihensummen der P und Q braucht keine für den einzelnen Fall des Gleichgewichtes der Elektricität auf zwei einander influenzirenden Leitern zu verschwinden, wenn noch elektrische Massen, die an Nichtleitern haften, influenzirend wirken. Bestimmt man nämlich zuerst diejenigen elektrischen Ladungen beider Leiter, die auf dem einen Leiter haften würden, wenn der andere Leiter gar nicht vorhanden wäre, so ist im Allgemeinen die auf dem Leiter I. haftende Elektricitätsmenge $p_1^0 - q_1^0$, die auf dem Leiter II. haftende $p_2^0 - q_2^0$ und es sind im Allgemeinen sowohl Flächentheile mit positiver als auch solche mit negativer Elektricität auf jedem der beiden Leiter vorhanden. Der weiter zu befolgende Weg, um elektrisches Gleichgewicht herzustellen, ist ganz wie der im allgemeinen besprochene Weg und wird gerade so befolgt, als ob die auf den Nichtleitern vorhandenen Elektricitäten unwirksam wären.

Ist eine beliebige Menge elektrischer Nichtleiter und gegenseitig influenzirend wirkender Leiter vorhanden, so kann man der Bedingung des Gleichgewichtes genügen, indem man zuerst elektrische Ladungen über die Leiter verbreitet derart, dass die Potentialfunction einer jeden elektrischen Ladung eines Leiters für alle Punkte des zugehörigen Leiters den ihr zukommenden constanten Werth erlangt. Hierauf leite man mit Ausnahme eines einzigen Leiters alle übrigen zur Erde durch einen verschwindend dünnen Draht ab und bestimme die Dichtheit der durch die Elektricität des nicht abgeleiteten Leiters auf jedem einzelnen der abgeleiteten Leiter hervorgerufenen Influenzelektricität. Man wiederhole das letztere Experiment, indem man die Rolle des nicht abgeleiteten Leiters der Reihe nach von jedem einzelnen Leiter annehmen lässt, bis die Dichtheit der erzeugten Influenzelektricität eine verschwindende ist, was in eben dem Masse eintreten muss, als die Anzahl der Versuche in's Unendliche wächst.

Man überzeugt sich leicht, dass auch jetzt die Gesammtladung eines jeden Leiters, wenn keine elektrischen Nichtleiter

vorhanden sind, besteht aus soviel Theilladungen, als überhaupt Leiter vorhanden sind, indem die von einem jeden Leiter herkommende Theilladung als Factor den jenem Leiter zukommenden Werth der constanten Gesammtpotentialfunction enthält, und zwar mit demselben Vorzeichen, wenn die Theilladung von demselben Leiter herkommt, auf dem sie selbst haftet, mit entgegengesetztem Vorzeichen, wenn diess nicht der Fall ist. Sind noch wirksame elektrische Nichtleiter vorhanden, so verdoppelt sich die genannte Anzahl Theilladungen.

Jede der einzelnen Theilladungen besteht aus einer unendlichen Reihe von Elementen, die schneller als eine gewöhnliche geometrische Reihe gegen Null convergiren.

Da die Constanten α ebenso auch hier, wo es sich um die gegenseitige Influenz beliebig vieler Leiter handelt, wie in §. 5, wo nur ein einziger Leiter gegeben war, nur als einfache Factoren auftreten, so folgt, dass man ohne Mühe allen Gleichgewichtsbedingungen genügen kann, wenn man allgemein denen für $\alpha = 1$ und $\alpha = 0$ Genüge geleistet hat.

Wenn sich zwei elektrische Leiter berühren, so unterscheiden wir leitende und nicht leitende Berührung; erstere findet Statt, wenn Elektricität von einem Leiter auf den andern übergehen kann, letztere, wenn diess nicht der Fall ist. Findet leitende Berührung statt, so vertheilt sich die Elektricität auf beiden Leitern, als ob sie zusammen nur einen einzigen Leiter bildeten, also auch so, dass der constante Werth der Potentialfunction V aller vorhandenen Elektricität für alle Punkte beider Leiter derselbe ist. An der Berührungsstelle ändert sich demnach der Werth der Potentialfunction nicht, wenn man auf der Normale des einen Leiters nach aussen hin fortschreitet, es ist demnach für die Berührungsstelle $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} = 0$, mithin nach 2) §. 4. auch $\varrho = 0$. An der Berührungsstelle zweier sich leitend berührender Elektricitätsleiter ist immer die Dichtheit der Elektricität gleich Null.

Anmerkung. Sind die Berührungsstellen zweier sich leitend berührender Elektricitätsleiter endliche Flächenstücke, so scheint in dem letzten Resultate ein Widerspruch

gegen den Satz 3) §. 4. zu sein, allein beide Leiter gelten in dem vorausgesetzten Falle zusammen wie ein einziger Leiter und die Flächenstücke, wo Berührung stattfindet, gehören dann zum innern Raume des Leiters, in welchem sich ja auch nach dem ersten Satze in §. 4. gar keine Elektricität vorfinden kann.

Findet nicht leitende Berührung zweier elektrischer Leiter statt, so ist zu unterscheiden, ob die Gesammtpotentialfunction V für beide Leiter denselben constanten Werth oder zwei verschiedene constante Werthe besitzt. Im ersteren Falle verhält sich die Sache ganz so wie bei leitender Berührung; im zweiten Falle ändert sich an der Berührungsstelle die Potentialfunction V, wenn man auf der Normale nach aussen fortschreitet, plötzlich um einen endlichen Werth, es ist also auch $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0}$ dem absoluten Werthe nach unendlich gross; gleiches gilt demnach auch von der elektrischen Dichtheit ϱ nach 2) §. 4.

Da eine unendlich grosse elektrische Dichtheit physikalisch unmöglich ist, so muss an der betreffenden Stelle ein Elektricitätsverlust eintreten. Es ist diess in der Experimentalphysik immer wichtig für die Schichten eines Nichtleiters, die zunächst den Leiter zum Behuf der Isolirung berühren müssen und es erklärt sich hieraus das immer verhältnissmässig leichte Uebergehen von Elektricität von Leitern auf Nichtleiter, da, wie 5) §. 4. lehrt, die treibende Kraft proportional dem Quadrate der elektrischen Dichtheit ist.

Aehnliche Erscheinungen müssen auch eintreten, wenn die beiden elektrischen Leiter nur durch eine sehr dünne nichtleitende Schicht von einander getrennt sind, wie diess namentlich bei den in der Experimentalphysik so wichtigen condensirenden Apparaten der Fall ist. Die Erscheinung des sogenannten Rückstandes ist nur eine Folge der eben genannten Thatsache.

Wir unterlassen es, hier weitere allgemeine Untersuchungen über die Influenzelektricität anzustellen, weil wir zu viele Voraussetzungen über die specielle Form und gegenseitige Lage der in Wechselwirkung tretenden elektrischen

Leiter und Nichtleiter machen müssten. Wir verweisen vielmehr in dieser Beziehung auf die nächsten Capitel.

Anmerkung. Es ist in diesem Paragraphen mehrfach der Ausdruck „durch einen verschwindend dünnen Draht zur Erde ableiten“ gebraucht worden, in welchem ein für die Experimentalphysik unerfüllbares Postulat zu liegen scheint. Allein da wir jenen Ausdruck immer nur so gebraucht haben, dass er dasselbe sagte wie „die Gesammtpotentialfunction gleich Null setzen“ so ist leicht ersichtlich, dass man über die Beschaffung eines verschwindend dünnen Ableitungsdrahtes keine Scrupel zu haben braucht.

§. 7.

Die Constanten α.

Wir haben bisher immer angenommen, dass die in den Gleichgewichstsbedingungen I, §. 3. vorkommenden Constanten α ohne weiteres gegeben seien; in der Regel ist diess aber nicht der Fall, sondern es sind statt der Constanten α die Elektricitätsmengen gegeben (oder werden aus gegebenen anderen Bedingungen zu berechnen verlangt), die den einzelnen Leitern direkt mitgetheilt worden sind. Schliessen wir, wie wir immer gethan haben, einen direkten Uebergang der Elektricität von einem Leiter zum anderen während der Herstellung des Gleichgewichtes aus, so sind also jene den Leitern direkt mitgetheilten Elektricitätsmengen nach 3) §. 1. während der Herstellung des Gleichgewichtes unveränderliche Grössen, vermittelst deren nun die Constanten α berechnet werden können.

Ist nur ein Leiter mit der Oberfläche σ vorhanden, und ist G die ihm direkt mitgetheilte Elektricitätsmenge, so ist offenbar nach dem ebengesagten

$$G = \int \varrho \, d\sigma$$

wenn sich die Integration erstreckt über die ganze Oberfläche σ des Leiters, auf der die elektrische Dichtheit ϱ beträgt.

Ist nun V die Gesammtpotentialfunction aller vorhandenen elektrischen Massen, die für irgend einen Punkt des

Leiters + 1 beträgt, während sie in Wirklichkeit α betragen soll, so ist

$$\varrho = -\frac{\alpha}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0}$$

und

$$G = -\frac{\alpha}{4\pi}\int\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} d\sigma,$$

also

$$\alpha = -\frac{4\pi G}{\int\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} d\sigma}.$$

Ein anderer und gewöhnlich kürzerer Weg, um die Constanten α zu bestimmen, besteht in der Anwendung des Satzes in §. 2. Cap. I. über die Art des Verschwindens von V für unendlich entfernte Punkte, in dem man einfach hat

$$G = \lim_{l=\infty} l V.$$

Sind beliebig viele, etwa q Leiter $K_1, K_2, \ldots K_q$ gegeben, denen die Elektricitätsmengen resp. $Q_1, Q_2, \ldots Q_q$ direkt mitgetheilt wurden und ist ausserdem w die Potentialfunction von elektrischen Massen, die an etwa vorhandenen Nichtleitern haften, so kann die Gesammtpotentialfunction V aller vorhandenen elektrischen Massen dargestellt werden in der Form:

$$V = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \ldots + \alpha_q v_q + w,$$

wenn die α ihre gewöhnliche Bedeutung haben und die v so gewählte Potentialfunctionen sind, dass allgemein v_s für alle Punkte der Oberfläche des s^{ten} Leiters gleich 1, für alle Punkte der Oberflächen aller übrigen Leiter gleich Null ist, und

$$V - w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \ldots + \alpha_q v_q = W$$

genügt der Bedingung des elektrischen Gleichgewichtes. Nach 2) §. 4. ist alsdann allgemein die elektrische Dichtheit ϱ_s auf dem s^{ten} Leiter

$$\varrho_s = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial W}{\partial n_s}\right)_{+0},$$

wenn $\frac{\partial W}{\partial n_s}$ die Differentiation von W nach der Normale des

$s$ten Leiters bezeichnet. Es ist daher auch

$$Q_s = \int \varrho_s \, d\sigma_s = -\frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{\partial W}{\partial n_s}\right)_{+0} d\sigma_s = -\frac{1}{4\pi} \sum_1^q {}_s\, \alpha_s \int \left(\frac{\partial V_s}{\partial n_s}\right) d\sigma_s.$$

Solcher linearer Gleichungen, wie

$$Q_s = -\frac{1}{4\pi}\left[\alpha_1 \int \left(\frac{\partial v_1}{\partial n_s}\right)_{+0} d\sigma_s + \alpha_2 \int \left(\frac{\partial v_2}{\partial n_s}\right)_{+0} d\sigma_s + \dots \right.$$
$$\left. + \alpha_q \int \left(\frac{\partial v_q}{\partial n_s}\right) d\sigma_s \right]$$

kann man q aufstellen, aus denen sich dann die α nach bekannten Methoden leicht berechnen und durch die gegebenen Grössen Q darstellen lassen.

Sind keine elektrischen Nichtleiter vorhanden, so ist $w = 0$ und auf den ganzen ausserhalb der Leiter befindlichen Raum können wir den Green'schen Satz §. 5. Cap. I. anwenden, indem entsteht

$$4\pi V = -\int \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n}\right) d\Sigma,$$

wenn die Integration sich erstreckt über alle Oberflächen der gegebenen Leiter, deren Element kurz mit $d\Sigma$ bezeichnet worden ist, und wenn die Potentialfunction U in dem Punkte, auf welchen sich das V der linken Seite bezieht, unendlich wird wie $\frac{1}{r}$, wenn r die Entfernung vom Nachbarpunkte bezeichnet. Unterwerfen wir ferner, wie es immer erlaubt ist, U der Bedingung, dass es verschwindet für alle Punkte der Oberflächen aller gegebenen Leiter, so entsteht einfach

$$4\pi V = \int V \frac{\partial U}{\partial n} d\Sigma.$$

Setzen wir rechter Hand den Werth von V

$$V = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_q v_q$$

ein und beachten zugleich die Bedeutung der v, so entsteht:

$$V = \frac{1}{4\pi}\left\{\alpha_1 \int \frac{\partial U}{\partial n_1} d\sigma_1 + \alpha_2 \int \frac{\partial U}{\partial n_2} d\sigma_2 + \dots + \alpha_q \int \frac{\partial U}{\partial n_q} d\sigma_q\right\}$$

folglich ist auch

$$Q_s = -\frac{1}{(4\pi)^2}$$

$$\left\{\alpha_1 \int\!\!\int \frac{\partial^2 U}{\partial n_1 \partial n_s} d\sigma_1 d\sigma_s + \alpha_2 \int\!\!\int \frac{\partial^2 U}{\partial n_2 \partial n_s} d\sigma_2 d\sigma_s + \cdots\cdot\right.$$

$$\left. + \alpha_q \int\!\!\int \frac{\partial^2 U}{\partial n_q \partial n_s} d\sigma_q\, d\sigma_s \right\}.$$

Ist zur Abkürzung

$$-\frac{1}{(4\pi)^2} \int\!\!\int \frac{\partial^2 U}{\partial n_r \partial n_s} d\sigma_r\, d\sigma_s = \gamma_{rs},$$

so ist noch

$$\gamma_{rs} = \gamma_{sr}.$$

Gesetzt nun, es wären in der Gleichung

$$Q_r = \alpha_1 \gamma_{1r} + \alpha_2 \gamma_{2r} + \cdots\cdot + \alpha_q \gamma_{qr}$$

sämmtliche α, mit Ausnahme von α_s, gleich Null, während α_s selbst gleich 1 ist, und bei einem andern Gleichgewichtszustande der Elektricität auf denselben in unveränderter Lage verbliebenen Leitern

$$Q_s = \alpha_1 \gamma_{1s} + \alpha_2 \gamma_{2s} + \cdots\cdots + \alpha_q \gamma_{qs}$$

sämmtliche α mit Ausnahme von α_r gleich Null während $\alpha_r = 1$ ist, so folgte

$$Q_r = Q_s = \gamma_{sr} = \gamma_{rs}$$

Mit Beachtung der physikalischen Bedeutung des Verschwindens von einem der α, vergl. §. 4., erhalten wir hierdurch den Satz:

Wenn ein beliebiges System von Leitern K_1, K_2, ... K_q für Elektricität gegeben ist, und Elektricität nur auf diesen Leitern vorhanden ist, so ist die Menge freier Elektricität, welche auf einem der Leiter K_r vorhanden ist, wenn alle Leiter mit Ausnahme von K_s zur Erde abgeleitet sind und auf K_s die Potentialfunction gleich 1 ist, gleich der Menge freier Elektricität, welche auf K_s vorhanden ist, wenn alle Leiter mit Ausnahme

von K_r zum Boden abgeleitet sind und auf diesem der Werth der Potentialfunction 1 beträgt.[1])

Literatur:

Zu den vier letzten Paragraphen findet man die einschlagende Literatur in:

George Green: An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism. Crelle's Journal, Bnd. 39, 44 und 47.

A. Beer: Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik. Braunschweig 1865.

E. Betti: Teorica delle forze che agoniscono secondo la legge di Newton, Pisa 1865.

---

[1]) Diesen Satz gab Riemann in seinen Vorlesungen über „das Potential.“

Capitel III.

Besondere Methoden zur Bestimmung der Dichtheit, mit welcher sich eine gegebene Elektricitätsmenge im Gleichgewichtszustande auf Leitern vertheilt.

Die in diesem Capitel zu behandelnden Methoden der Bestimmung der Dichtheit der Elektricität auf Leitern sind vorwiegend nur Anwendungen des Satzes I, §. 6, Cap. I.

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0}\right]$$

in der vereinfachten Form

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0},$$

die nach dem Satze 2, §. 4. Cap. II. gültig ist, wenn die Leiteroberfläche eine Niveaufläche der Potentialfunction V ist, die erzeugt wird von allen vorhandenen wirksamen elektrischen Massen.

Zur Abkürzung mögen nun hier noch nach dem Vorgange von Chasles[1]) zwei neue Bezeichnungen eingeführt werden. Denkt man sich einen unendlich engen Canal, dessen Seitenwände sämmtlich auf allen auf einander folgenden Niveauflächen der Potentialfunction V senkrecht stehen, so schneidet ein solcher Canal aus jeder Niveaufläche ein Flächenelement aus; irgend zwei solche, von demselben unendlich dünnen Canale ausgeschnittene Flächenelemente sollen correspondirende Elemente heissen.

Denkt man sich eine Niveaufläche der Potentialfunction V nach aussen[2]) hin allenthalben mit einer unendlich dünnen

---

1) Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris 1839 1er sem. — Additions à la Connaissance des Temps pour 1845.

2) Am angeführten Orte construirt Chasles die unendlich dünne Schicht auf der inneren Seite der Niveaufläche, weil er die Richtung der Normalen nach innen als die positive annimmt, nicht, wie wir durchgängig festgehalten haben, die Normale nach aussen.

Massenschicht von constanter Dicke belegt, deren Massendichtigkeit aber dem Werthe von $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0}$ proportional ist, so möge eine solche Massenschicht Niveauschicht heissen und die Elemente derselben, die über correspondirenden Elementen construirt sind, mögen correspondirende Massenelemente genannt werden.

§. 1.

Allgemeine Folgerungen aus den Betrachtungen in §. 11. Cap. I. über die äquivalente Massentransposition.

Der eine leicht ausführbare Fall der äquivalenten Massentransposition in §. 11. Cap. I. kann benützt werden, um leicht eine grosse Menge von Beispielen für das elektrische Gleichgewicht auf einzelnen isolirten Leitern zu berechnen. Nimmt man nämlich irgend wo in beliebiger Vertheilung elektrische Massen an, deren Potentialfunction V sei und ist $V = \alpha$ irgend eine Niveaufläche dieser Massen, die dieselben ganz umschliesst und die desswegen kurz eine äussere Niveaufläche genannt werden möge, so erhält die äquivalent auf die Fläche $V = \alpha$ transponirte ursprünglich angenommene Masse dort die Dichtheit

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0}.$$

Umgekehrt muss auch, wenn ursprünglich die Leiteroberfläche $V = \alpha$ gegeben wäre, der Bedingung des elektrischen Gleichgewichtes die elektrische Vertheilung

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0}$$

genügen, weil eine solche Vertheilung für alle Punkte der Fläche $V = \alpha$ die constante Potentialfunction $V = \alpha$ besitzt, was nach 1, §. 4. Cap. II. für das elektrische Gleichgewicht hinreichend ist.

Je nachdem man der Constanten α andere und andere Werthe beilegt, erhält man auch andere und andere Ni-

veauflächen, die man als Leiteroberflächen betrachten kann und auf denen man daher mit leichter Mühe die Vertheilung der Elektricität im Gleichgewichtszustande bestimmen kann. Diese Vertheilungen von Elektricität auf den verschiedenen Niveauflächen stehen zu einander in interessanten Beziehungen, die jetzt nach dem Vorgange von Chasles[1]) näher angeführt werden sollen, indem wir gleich hier zur Verallgemeinerung der zu erlangenden Resultate noch anführen, dass nach §. 5. Cap. II. die Dichtheit, mit welcher sich die Elektricitätsmenge λQ über eine Fläche im Gleichgewichtszustande verbreitet, $\lambda \varrho$ ist, wenn die von der Elektricitätsmenge Q auf derselben Fläche herkommende Dichtheit im Gleichgewichtszustande ϱ ist.

Der in §. 10. Cap. I. über die treibende Kraft erlangte Satz lässt sich hier einfach so aussprechen:

Zwei correspondirende Massenelemente zweier äusseren Niveauschichten verhalten sich zu einander wie die Gesammtmassen der einzelnen Niveauschichten, zu denen sie gehören.

Aus dem Umstande, dass die Potentialfunction einer Niveauschicht für alle Punkte des ganzen inneren Raumes derselben constanten Werth besitzt wie für die Punkte der zugehörigen Niveaufläche, folgt:

Eine äussere Niveauschicht übt auf einen inneren Punkt gar keine Wirkung aus.

Aus dem einfachen Begriff der für jeden äussern Punkt äquivalenten Massentransposition folgt:

Die Wirkungen zweier äusseren Niveauschichten auf denselben äusseren Punkt haben dieselbe Richtung und eine Intensität, die proportional ist der Gesammtmasse jeder einzelnen zugehörigen Niveauschicht.

Nimmt man noch hinzu, dass die äquivalente Massentransposition nach aussen immer und nur auf eine einzige Weise möglich ist, vergl. §. 11. Cap. I. so ergiebt sich:

Die äusseren Niveauschichten haben alle dieselben äusseren Niveauflächen; jede äussere Ni-

1) l. c.

veaufläche ist auch Niveaufläche für die auf ihr gebildete Niveauschicht.

Jede äussere Niveauschicht hat zu äusseren Niveauflächen die Niveauflächen der ursprünglich angenommenen Masse, so dass die Wirkung dieser Masse und die einer äusseren Niveauschicht auf denselben äusseren Punkt dieselbe Richtung haben und die Intensitäten sich verhalten wie die Gesammtmasse der wirkenden Niveauschicht zu der der angenommenen Masse.

Der Werth der Potentialfunction einer äusseren Niveauschicht auf einen Punkt einer äusseren Niveaufläche verhält sich zum Werthe der Potentialfunction der auf dieser letzteren Fläche construirten Niveauschicht auf einen Punkt der Niveaufläche, auf der die erstere Niveauschicht construirt worden ist, wie die respective Gesammtmasse beider Niveauschichten.

Es seien nun ξ, η, ζ die Coordinaten des Massenelementes dm der ursprünglich angenommenen Masse bezogen auf irgend ein räumliches rechtwinkliges Coordinatensystem.

Es sei ferner

u der Abstand des Massenelementes dm vom Coordinatenanfang,

r der Abstand des Massenelementes dm von irgend einem äusseren weit genug entfernten Punkte,

$\varDelta$ der Abstand des letzteren Punktes vom Coordinatenanfang und

a, b, c seien die Cosinus der Winkel, die der Radiusvector $\varDelta$ mit den Coordinatenaxen bildet.

Alsdann ist

$$r^2 = \varDelta^2 - 2\varDelta\,(a\xi + b\eta + c\zeta) + u^2,$$

folglich, wenn man den Werth $\frac{1}{r}$ bildet und nach absteigenden Potenzen von $\varDelta$ entwickelt, wobei wir $\varDelta$ so gross sein lassen, dass die Entwickelung immer convergent bleibt,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\varDelta} + \frac{1}{\varDelta^2}(a\xi + b\eta + c\zeta) + \frac{1}{\varDelta^3}\Big(- \frac{u^2}{2} + \tfrac{3}{2}\,a^2\xi^2 + \tfrac{3}{2}\,b^2\eta^2 + \tfrac{3}{2}\,c^2\zeta^2 + 3a\xi b\eta + 3b\eta c\zeta + 3c\zeta a\xi\Big) + \ldots .$$

Bilden wir nun die Potentialfunction V der angenommenen Masse auf den Punkt, dessen rechtwinklig räumliche Coordinaten $a\Delta$, $b\Delta$ und $c\Delta$ sind, so entsteht:

$$V = \frac{1}{\Delta}\int dm + \frac{1}{\Delta^2}\left(a\int\xi\, dm + b\int\eta\, dm + c\int\zeta\, dm\right)$$
$$+ \frac{1}{\Delta^3}\Big[-\tfrac{1}{2}\int u^2\, dm + \tfrac{3}{2}\int(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2)\, dm$$
$$+ 3bc\int\eta\zeta\, dm + 3ca\int\zeta\xi\, dm + 3ab\int\xi\eta\, dm\Big] + \ldots\ldots,$$

alle Integrationen erstreckt über die ganze angenommene Masse m.

Es sei ferner V_1 die Potentialfunction einer äusseren Niveauschicht der angenommenen Masse m auf denselben Punkt $a\Delta$, $b\Delta$, $c\Delta$, und es mögen m_1, ξ_1, η_1, ζ_1, u_1 und dm_1 dieselben Werthe im Bezug auf diese Niveauschicht darstellen, welche resp. m, ξ, η, ζ, u und dm im Bezug auf die ursprünglich angenommene Masse vertraten. Dann ist nach einem der obigen Sätze

$$V_1 = \frac{m_1}{m}\, V, \text{ also auch}$$

$$V = \frac{m}{m_1}\, V_1, \text{ oder}$$

wenn wir den Werth von V_1 wie oben entwickeln und in diese letzte Gleichung einsetzen:

$$V = \frac{m}{m_1}\Big\{\frac{1}{\Delta}\int dm_1 + \frac{1}{\Delta^2}\left(a\int\xi_1\, dm_1 + b\int\eta_1\, dm_1 + c\int\zeta_1\, dm_1\right)$$
$$+ \frac{1}{\Delta^3}\Big[-\tfrac{1}{2}\int u_1^2\, dm_1 + \tfrac{3}{2}\int(a^2\xi_1^2 + b^2\eta_1^2 + c^2\zeta_1^2)\, dm_1$$
$$+ 3bc\int\eta_1\zeta_1\, dm_1 + 3ca\int\zeta_1\xi_1\, dm_1 + 3ab\int\xi_1\eta_1\, dm_1\Big] + \ldots\Big\},$$

wobei jetzt die Integrationen über die ganze Niveauschicht zu erstrecken sind.

Die beiden für V gefundenen Entwickelungen müssen nun übereinstimmen für beliebige hinreichend kleine Werthe von $\frac{1}{\Delta}$ und für beliebige reelle Werthe von a, b, c, wenn diese letzteren Grössen noch der Bedingung genügen

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Setzt man irgend zwei dieser Cosinus gleich Null, also

den dritten gleich 1, so liefern die Coëfficienten von $\frac{1}{\Delta^2}$ in den beiden Entwickelungen für V

$$1, \quad \begin{aligned} \frac{1}{m}\int \xi\, dm &= \frac{1}{m_1}\int \xi_1\, dm_1; \\ \frac{1}{m}\int \eta\, dm &= \frac{1}{m_1}\int \eta_1\, dm_1; \\ \frac{1}{m}\int \zeta\, dm &= \frac{1}{m_1}\int \zeta_1\, dm_1. \end{aligned}$$

Setzt man $a = 0$, $b = b$, also $c = \sqrt{1-b^2}$, so geben die Coëfficienten von $\frac{1}{\Delta^3}$ die Gleichung:

$$-\tfrac{1}{2}\int(u^2-3\zeta^2)\, dm + \tfrac{3}{2}b^2\int(\eta^2-\zeta^2)\, dm + 3b\sqrt{1-b^2}\int \eta\,\zeta\, dm$$
$$= \frac{m}{m_1}\left\{-\tfrac{1}{2}\int(u_1{}^2-3\zeta_1{}^2)\, dm_1 + \tfrac{3}{2}b^2\int(\eta_1{}^2-\zeta_1{}^2)\, dm_1 \right.$$
$$\left. + 3b\sqrt{1-b^2}\int \eta_1\,\zeta_1{}^2\, dm_1\right\}.$$

Da diese Gleichung gelten muss für jeden reellen Werth von b, der kleiner als 1 ist, so folgt aus ihr

$$\frac{1}{m}\int \eta\,\zeta\, dm = \frac{1}{m_1}\int \eta_1\,\zeta_1\, dm_1$$

und durch Coordinatenvertauschung

$$2, \quad \begin{aligned} \frac{1}{m}\int \zeta\,\xi\, dm &= \frac{1}{m_1}\int \zeta_1\,\xi_1\, dm_1, \\ \frac{1}{m}\int \xi\,\eta\, dm &= \frac{1}{m_1}\int \xi_1\,\eta_1\, dm_1, \end{aligned}$$

und auch

$$3, \quad \begin{aligned} \frac{1}{m}\int (\eta^2-\zeta^2)\, dm &= \frac{1}{m_1}\int(\eta_1{}^2-\zeta_1{}^2)\, dm_1 \\ \frac{1}{m}\int (\zeta^2-\xi^2)\, dm &= \frac{1}{m_1}\int(\zeta_1{}^2-\xi_1{}^2)\, dm_1 \\ \frac{1}{m}\int (\xi^2-\eta^2)\, dm &= \frac{1}{m_1}\int(\xi_1{}^2-\eta_1{}^2)\, dm_1. \end{aligned}$$

Die drei Systeme von Gleichungen 1, 2, und 3, lehren aber:

Die Niveauschicht besitzt denselben Massenschwerpunkt wie die ursprünglich angenommene Masse; sie hat, bezogen auf dieselben zwei rechtwinklig durch denselben Punkt gehende Axen, dasselbe Centrifugalmoment, also auch dieselben

Hauptträgheitsaxen und die **Differenzen** der Trägheitsmomente bezogen auf **dieselben** zwei sich rechtwinklig schneidende **Geraden** verhalten sich wie die Massen. Insbesondere haben also auch sämmtliche **Niveauschichten** dieselben Hauptträgheitsaxen und sie haben dieselben Hauptträgheitsmomente, wenn die **Niveauschichten** entstanden sind durch einfache **äquivalente** Massentransposition.[1])

§. 2.

Beispiele als Anwendungen der im vorigen Paragraphen aufgeführten allgemeinen Sätze.

1) Angenommen sei eine punktförmige elektrische Masse Q, ihre Potentialfunction V ist $\frac{Q}{r}$, die Schaar der zur angenommenen elektrischen Masse Q gehörigen Niveauflächen hat zur Gleichung

$$V = \alpha = \frac{Q}{r} \text{ oder}$$

$$r = \frac{Q}{\alpha}$$

und aus dieser Gleichung entsteht die Gleichung einer einzigen bestimmten Niveaufläche, wenn in ihr dem α der zugehörige bestimmte Werth gegeben wird.

Die einzelnen Niveauflächen sind im jetzigen Falle concentrische Kugeln, deren Mittelpunkt der Punkt ist, in welchem die Masse Q angenommen wurde.

Die Linien, welche senkrecht stehen auf den einzelnen successiven Niveauflächen oder die Kraftlinien sind offenbar Gerade, die sich sämmtlich im gemeinsamen Centrum der Niveauflächen durchschneiden und nach allen Richtungen ins Unendliche verlaufen.

Die Dichtheit der Elektricität auf der Kugel vom Radius R ist:

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=R},$$

---

1) Vergl. Jullien: Problèmes de mécanique rationelle, Deuxième édition t. II. p. 361 et sqq.

oder $\varrho = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{R^2}$.

Bezeichnet S die Oberfläche der Kugel, so ist auch

$$\varrho = \frac{Q}{S},$$

das bekannte Resultat, dass sich auf einer Kugelfläche die Elektricität mit gleichförmiger Dichtheit anordnet.

Dasselbe Resultat giebt auch die Formel 15, §. 10. Cap. I., die für den jetzigen Fall lautet:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_\infty e^{+\int\limits_R^\infty \frac{2}{R} dR}$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_\infty (R^2)_\infty \cdot \frac{1}{R^2}.$$

Den bestimmten Grenzwerth $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_\infty (R^2)_\infty$ entnehmen wir aus der Bedingung, dass die gesammte auf der Kugel vom Radius R vorhandene Elektricität gleich der ursprünglich angenommenen Q sein muss; es ist also

$$Q = \int \varrho \, d\sigma = \int \varrho \, R^2 \, dw = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_\infty (R^2)_\infty \int dw$$

$$Q = -\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_\infty (R^2)_\infty,$$

folglich ist

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{Q}{R^2} \text{ und}$$

$$\varrho = +\frac{1}{4\pi} \frac{Q}{R^2} = \frac{Q}{S}.$$

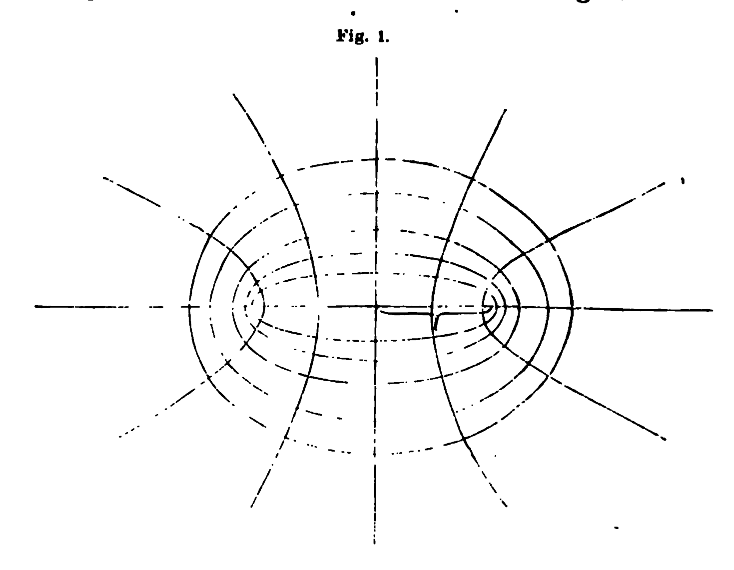
Die Kraft, mit welcher jedes Elektricitätstheilchen nach aussen fortgetrieben wird, ist

$$-\varrho \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 = \frac{Q^2}{4\pi} \frac{1}{R^4}.$$

Diese Kraft ist also umgekehrt proportional mit der 4ten Potenz des Kugelradius.

2) Angenommen werde eine gleichförmig mit der Gesammtmasse Q belegte Gerade von der Länge $2\,l$. Vergl. Figur 1.

Fig. 1.



Es seien $\varrho = \sqrt{y^2 + z^2}$ und x die rechtwinklig räumlichen Coordinaten eines Punktes, auf den sich die Potentialfunction V der angenommenen Gesammtmasse Q bezieht, wenn der Coordinatenanfang in der Mitte der Geraden $2l$ liegt und die X Axe auf diese Gerade selbst zu liegen kommt. Alsdann ist

$$V = \frac{Q}{2l}\int_{-l}^{+l} \frac{d\xi}{\sqrt{\varrho^2 + (x-\xi)^2}} = \frac{Q}{2l}\, l \frac{\sqrt{\varrho^2 + (x-l)^2} - (x-l)}{\sqrt{\varrho^2 + (x+l)^2} - (x+l)}.$$

Die Schaar der Niveauflächen ist bestimmt durch die Gleichung:

$$e^{\alpha \frac{2l}{Q}} = \frac{\sqrt{\varrho^2 + (x-l)^2} - (x-l)}{\sqrt{\varrho^2 + (x+l)^2} - (x+l)} = \frac{\sqrt{\varrho^2 + (x+l)^2} + (x+l)}{\sqrt{\varrho^2 + (x-l)^2} + (x-l)}$$

aus der die Gleichung einer einzelnen bestimmten Niveaufläche hervorgeht, indem man dem α den zugehörigen bestimmten Werth ertheilt.

Schafft man aus der vorigen Gleichung auf gewöhnlichem Wege durch Quadrirung die irrationalen Grössen fort, so findet man, wenn noch zur Abkürzung

$$e^{\alpha\frac{2l}{Q}} = c$$

gesetzt wird

$$\frac{(c-1)^2}{4cl^2}\varrho^2 + \frac{(c-1)^2}{l^2(c+1)^2}x^2 = 1.$$

Die Niveauflächen sind also verlängerte Rotationsellipsoide, deren grosse Hauptaxe

$$2a = 2l\frac{c+1}{c-1} = 2l\frac{e^{\alpha\frac{l}{Q}} + e^{-\alpha\frac{l}{Q}}}{e^{+\alpha\frac{l}{Q}} - e^{-\alpha\frac{l}{Q}}} \text{ ist,}$$

und deren kleine durch

$$2b = 2l.\frac{2\sqrt{c}}{c-1} = 2l\frac{1+1}{e^{+\alpha\frac{l}{Q}} - e^{-\alpha\frac{l}{Q}}}$$

dargestellt wird.

Mit abnehmenden α werden die Hauptaxen der Niveauflächen mehr und mehr einander gleich und die Niveauflächen, denen ein unendlich kleines α zukommt oder die unendlich entfernten Niveauflächen sind Kugeln. (Vergl. den Anfang von §. 9. Cap. I.)

Bildet man den Werth von $\sqrt{a^2-b^2}$, so erhält man

$$\sqrt{a^2-b^2} = \pm l;$$

die Niveauflächen sind also confocale Rotationsellipsoide, deren gemeinsame Brennpunkte die Endpunkte der angenommenen mit der Masse Q belegten Geraden sind.

Um die Kraftlinien zu bestimmen, braucht man sich nur des bekannten geometrischen Resultates zu erinnern, dass confocale Ellipsen von confocalen Hyperbeln, die dieselben Brennpunkte besitzen, wie die Ellipsen, rechtwinklig geschnitten werden. In unserem Falle sind daher die Kraftlinien die Durchschnittslinien confocaler Rotationshyperboloide mit zwei Mänteln und denselben Brennpunkten, die auch den Niveauflächen zugehören, mit Ebenen, die durch die grosse Hauptaxe der confocalen Ellipsoide gelegt sind. (Vergl. den Anfang von §. 9. Cap. I.)

Um die Dichtheit der Elektricität auf einem der als

Leiteroberfläche gegebenen Ellipsoide zu bestimmen, braucht man sich im allgemeinen nur zu erinnern, dass diese proportional dem Werthe $\frac{\partial V}{\partial n}$ ist, oder umgekehrt proportional dem Abstande eines unendlich nahen confocalen Ellipsoides. Die elektrische Dichtheit ist daher am kleinsten an den Stellen, die näher an der kleinen Hauptaxe, am stärksten an denen, die entfernter von ihr sind. (Vergl. das in §. 5. Cap. II. über den Einfluss der Krümmung auf die elektrische Ladung eines isolirten Leiters Gesagte.)

Um die Formel für die elektrische Dichtheit selbst zu erhalten, ermitteln wir zunächst

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2.$$

Nun ist

$$V = \frac{Q}{2l}\int_{-l}^{+l} \frac{d\xi}{\sqrt{\varrho^2 + (x-\xi)^2}},$$

folglich

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 = \left(\frac{Q}{2l}\right)^2 \left\{ \left[\int_{-l}^{+l} \frac{(x-\xi)\,d\xi}{\sqrt{\varrho^2+(x-\xi)^2}^3}\right]^2 + \left[\int_{-l}^{+l} \frac{\varrho\,d\xi}{\sqrt{\varrho^2+(x-\xi)^2}^3}\right]^2 \right\}$$

$$= \left(\frac{Q}{2l}\right)^2 \left\{ \left[\frac{-1}{\sqrt{\varrho^2+(x-l)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\varrho^2+(x+l)^2}}\right]^2 \right.$$

$$\left. + \left[\frac{-x+l}{\varrho\sqrt{\varrho^2+(x-l)^2}} + \frac{x+l}{\varrho\sqrt{\varrho^2+(x+l)^2}}\right]^2 \right\}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{\varrho l}\right)^2 \left\{1 - \frac{\varrho^2+x^2-l^2}{\sqrt{\varrho^2+(x-l)^2}\sqrt{\varrho^2+(x+l)^2}}\right\}.$$

Für $\varrho = 0$ also $x = a$ nimmt zwar dieser Ausdruck für $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2$ die Form $\frac{0}{0}$ an, allein man findet auf dem bekannten Wege durch Differentiation für diesen Fall

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2_{\varrho=0} = \frac{Q^2}{(a^2-l^2)^2},$$

folglich die elektrische Dichtheit an den beiden Enden des Ellipsoides

$$\frac{1}{4\pi}\,\frac{Q}{a^2-l^2}.$$

Hieraus erkennt man, je näher die Scheitel des Ellipsoides den Brennpunkten liegen, d. i. je gestreckter die Form des Ellipsoides ist, um so grösser ist auch die Dichtheit der Elektricität an den Scheiteln, dasselbe gilt auch für die auf die Elektricität der Scheitel ausgeübte Kraftwirkung

$$\frac{1}{4\pi}\,\frac{Q^2}{(a^2-l^2)^2},$$

die in der Richtung der grossen Axe von innen nach aussen thätig ist.

Beachtet man, dass $\sqrt{\varrho^2+(x-l)^2}=p_1$ und $\sqrt{\varrho^2+(x+l)^2}=p_2$ die beiden Brennstrahlen des Ellipsoidenpunktes xy sind, deren Summe gleich ist der grossen Hauptaxe $2a$ des Ellipsoides, so hat man die Gleichung

$$\left(\sqrt{\varrho^2+(x-l)^2}+\sqrt{\varrho^2+(x+l)^2}\right)^2=4a^2,$$

aus welcher folgt

$$\sqrt{\varrho^2+(x-l)^2}\,\sqrt{\varrho^2+(x+l)^2}=2a^2-\varrho^2-x^2-l^2.$$

Dadurch wird aber aus dem obigen Werthe von $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2=\left(\frac{Q}{l}\right)^2\frac{\frac{a+x}{\varrho}\cdot\frac{a-x}{\varrho}-1}{p_1\cdot p_2}.$$

Demnach ist die elektrische Dichtheit ϱ an irgend einer Stelle des Ellipsoides

$$\varrho=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n}=\frac{Q}{4l\pi}\cdot\sqrt{\frac{\frac{a+x}{\varrho}\cdot\frac{a-x}{\varrho}-1}{p_1\cdot p_2}},$$

wobei über das Vorzeichen rechter Hand zu bemerken ist, dass dasselbe nach dem Anfange von §. 5. Cap. II. mit dem Vorzeichen von Q übereinstimmen muss.

Endlich ist die Kraft, mit welcher ein Elektricitätstheilchen in der Richtung der Normale des Ellipsoides nach aussen fortgetrieben wird

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{Q}{l}\right)^2\frac{\frac{a+x}{\varrho}\cdot\frac{a-x}{\varrho}-1}{p_1\cdot p_2}$$

Nennt man b die kürzere Haupthalbaxe des Rotationsellipsoides, so gelten noch die Gleichungen

$$l^2 = a^2 - b^2;\ p_1 p_2 = a^2 + b^2 - x^2 - \varrho^2;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{\varrho^2}{b^2} = 1.$$

Führt man die Werthe von l^2 und $p_1\ p_2$ in den vorstehenden Ausdruck für $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2$ ein, so nimmt derselbe nach einfachen Reductionen die Form an

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 = \frac{Q^2}{a^2 b^4} \cdot \frac{1}{\frac{\varrho^2}{b^4} + \frac{\varrho^2 (x^2 + \varrho^2 - b^2)}{a^2 b^2 (a^2 - x^2 - \varrho^2)}} .$$

Ersetzt man ferner in dem Bruche $\frac{\varrho^2 (x^2 + \varrho^2 - b^2)}{a^2 b^2 (a^2 - x^2 - \varrho^2)}$ ϱ^2 durch seinen Werth $\varrho^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, so wird dieser Bruch einfach zu $\frac{x^2}{a^4}$, so dass auch entsteht

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 = \frac{Q^2}{a^2 b^4} \cdot \frac{1}{\frac{\varrho^2}{b^4} + \frac{x^2}{a^4}} .$$

Bezeichnet man mit p die Länge des Perpendikels, das vom Coordinatenanfang aus auf die Tangente im Punkte $x\varrho$ an das Rotationsellipsoid herabgelassen werden kann, so findet man leicht

$$p^2 = \frac{1}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{\varrho^2}{b^4}},$$

so dass die vorige Gleichung auch auf die Form gebracht werden kann:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 = \frac{Q^2 p^2}{a^2 b^4} .$$

Damit erhalten wir noch für die Dichtheit der Elektricität auf dem Rotationsellipsoid

$$\varrho = \frac{Q p}{4 a b^2 \pi}$$

und für die Kraft, mit welcher ein Elektricitätstheilchen nach aussen fortgetrieben wird:

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{Q^2 p^2}{a^2 b^4} .$$

Es ist nicht schwer, die beiden letzten Resultate in Worte zu fassen, man vergleiche übrigens dazu die Resul-

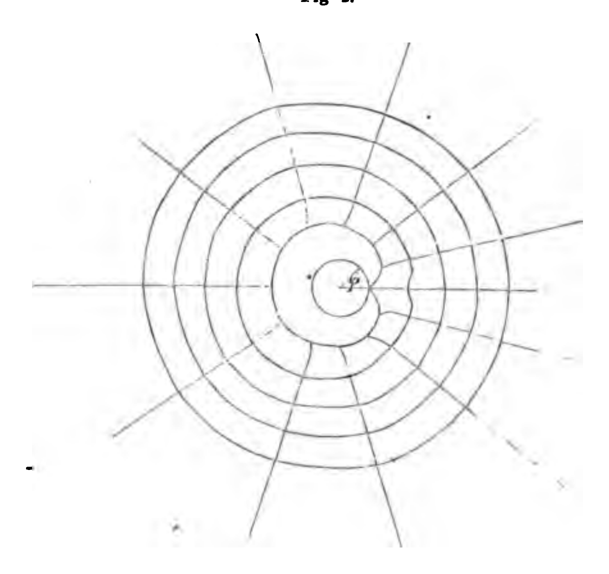
tate, welche im übernächsten Beispiele bei der Betrachtung des dreiaxigen Ellipsoides gewonnen werden.

Zu den beiden eben behandelten Beispielen möge hier noch bemerkt werden, dass die in §. 11. Cap. I. eingeführte Cardinalfläche vertreten wird durch die geometrischen Gebilde, die ursprünglich als mit der Elektricitätsmenge Q versehen angenommen wurden. —

3) Angenommen werde eine Kugelfläche vom Radius R, die belegt ist mit Masse von der veränderlichen Dichtheit D, wo D bestimmt wird durch die Gleichung:

$$D = m\left(\sin^2\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{6}\right),$$

Fig 2.



in der m einen constanten Factor und φ den Winkel bezeichnet, der gebildet wird von den beiden Radien, die nach dem Punkte mit der elektrischen Dichtheit D und nach einem unveränderlichen, festen Punkt der Kugel, deren Pol, gezogen sind. Vergl. Figur 2.

Die Quantität Q der gesammten angenommenen Masse ist jetzt

$$Q = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} R^2 \sin\varphi\, m \left(\sin^2\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{6}\right) d\varphi\, d\theta,$$

wenn wir die Coordinaten irgend eines Punktes der Kugelfläche beziehen auf ein räumliches Polarcoordinatensystem, dessen Polaraxe durch den Pol der Kugelfläche hindurchgeht. Es entsteht aus der letzten Gleichung

$$Q = m R^2 \pi \int_0^{\pi} \sin\varphi \left(2\sin^2\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{3}\right) d\varphi = m R^2 \pi \int_0^{\pi} \sin\varphi \left(\frac{2}{3} - \cos\varphi\right) d\varphi,$$

oder, weil

$$\int_0^{\pi} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi = 0$$

$$Q = \frac{2}{3} m R^2 \pi \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi = \frac{4}{3} m R^2 \pi.$$

Um die Potentialfunction V der angenommenen elektrischen Masse auf einen Punkt ausserhalb der Kugel zu bestimmen, nehmen wir den Radiusvector nach diesem Punkt gezogen vom Kugelmittelpunkte aus zur Axe eines räumlichen Polarcoordinatensystems, dessen Anfang im Kugelmittelpunkte liegt. Zur festen Ebene, von welcher aus die Winkel θ_1 gemessen werden, nehmen wir diejenige, welche durch die Polaraxe unseres Polarcoordinatensystemes und durch den Pol der Kugel hindurch geht. Es bedeute ferner

ψ den Winkel, der eingeschlossen wird von der Polaraxe und dem Radiusvector nach dem Pol der Kugel,

t die Entfernung des Punktes, auf den sich die Potentialfunction V bezieht, vom Kugelmittelpunkt,

R, θ_1 und φ_1 die Coordinaten irgend eines Punktes der Kugeloberfläche bezogen auf unser angenommenes Coordinatensystem.

Es ist nun das Oberflächenelement der Kugel $d\sigma = R^2 \sin\theta_1 \, d\theta_1 d\varphi_1$, die Entfernung des Punktes $R\theta_1\varphi_1$ der Kugelfläche von dem Punkte, auf welchen sich die Potentialfunction V bezieht

$$r = \sqrt{R^2 + t^2 - 2Rt\cos\theta_1},$$

und, wenn φ wie oben den Winkel bezeichnet, der eingeschlossen wird von den beiden Fahrstrahlen nach dem Pole der Kugel und nach dem Punkte $R\theta_1\varphi_1$,

$$\cos\varphi = \cos\theta_1 \cos\psi + \sin\theta_1 \sin\psi \cos\varphi_1,$$

folglich die Dichtheit der Elektricität im Punkte $R\,\theta_1\,\varphi_1$

$$D = m\left(\sin^2\frac{\varphi}{2} - \tfrac{1}{6}\right) = \frac{m}{2}\left(\tfrac{2}{3} - \cos\varphi\right)$$

$$D = \frac{m}{2}\left(\tfrac{2}{3} - \cos\theta_1 \cos\psi - \sin\theta_1 \sin\psi \cos\varphi_1\right).$$

Die Potentialfunction V wird nun

$$V = \frac{mR^2}{2}\int_0^\pi d\theta_1 \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta_1\left(\tfrac{2}{3} - \cos\theta_1\cos\psi - \sin\theta_1\sin\psi\cos\varphi_1\right)}{\sqrt{R^2 + t^2 - 2Rt\cos\theta_1}}\, d\varphi_1,$$

oder, weil $\int_0^{2\pi} \cos\varphi_1\, d\varphi_1 = 0$, nach Ausführung der übrig bleibenden Integration nach φ_1

$$V = \frac{2mR^2\pi}{3}\int_0^\pi \frac{\sin\theta_1\, d\theta_1}{\sqrt{R^2 + t^2 - 2Rt\cos\theta_1}} - mR^2\pi\cos\psi \int_0^\pi \frac{\sin\theta_1\cos\theta_1\, d\theta_1}{\sqrt{R^2 + t^2 - 2Rt\cos\theta_1}}.$$

Nun ist

$$\int \frac{\sin\theta_1\, d\theta_1}{\sqrt{R^2 + t^2 - 2Rt\cos\theta_1}} = \frac{1}{Rt}\sqrt{R^2 + t^2 - 2Rt\cos\theta_1} + \text{Const.},$$

folglich, da in unserem Falle immer $t \geqq R$.

$$\int_0^\pi \frac{\sin\theta_1\, d\theta_1}{\sqrt{R^2 + t^2 - 2Rt\cos\theta_1}} = \frac{2}{t}.$$

Setzt man ferner in dem zweiten Integrale

$$\sqrt{R^2 + t^2 - 2Rt\cos\theta_1} = y,$$

folglich

$$\cos\theta_1 = \frac{R^2 + t^2 - y^2}{2Rt}$$

$$\sin\theta_1\, d\theta_1 = \frac{y\,dy}{Rt},$$

so entsteht

$$\int_0^\pi \frac{\sin\theta_1\cos\theta_1\, d\theta_1}{\sqrt{R^2 + t^2 - 2Rt\cos\theta_1}} = \int_{t-R}^{t+R} \frac{R^2 + t^2 - y^2}{2R^2t^2}\, dy = \tfrac{2}{3}\,\frac{R}{t^2}.$$

Es ist daher

$$V = \frac{4mR^2\pi}{3t} - \frac{2mR^3\pi\cos\psi}{3t^2},$$

oder, wenn man die angenommene Gesammtmenge Q der Elektricität in die Formel einführt

$$V = Q\left(\frac{1}{t} - \frac{R\cos\psi}{2t^2}\right).$$

Die Schaar der Niveauflächen besitzt also die Gleichung:

$$\alpha = Q\left(\frac{1}{t} - \frac{R\cos\psi}{2t^2}\right).$$

oder

$$t = \frac{Q}{2\alpha}\left(1 + \sqrt{1 - 2R\frac{\alpha}{Q}\cos\psi}\right)$$

und die einzelnen Niveauflächen gehen aus diesen Gleichungen hervor, wenn man dem α bestimmte Werthe beilegt. Aus der letzteren Form der Gleichung der Niveauflächen erkennt man, dass es nur so lange reelle äussere Niveauflächen giebt, als

$$\alpha < \frac{Q}{2R}$$

ist.

Die Niveauflächen selbst sind Rotationsflächen um die durch den Kugelmittelpunkt und Pol gehende Gerade als geometrische Axe, jede Meridiancurve wendet der geometrischen Axe ihre concave Seite zu und es nähern sich die Niveauflächen mit abnehmendem absolutem Werthe von α mehr und mehr der Kugelform, während die Niveaufläche, deren absoluter Werth von α der möglichst grösste ist, nämlich $\frac{Q}{2R}$, eine scharf eingebogene Spitze besitzt, die mit dem Pole der Kugel selbst zusammenfällt.

Um die Gleichung der Kraftlinien zu erhalten, brauchen wir nur die Gleichung derjenigen Linien zu bestimmen, die senkrecht stehen auf allen in derselben Meridianebene gelegenen Meridiancurven der Niveauflächen, denn wenn wir die Meridianebene um die geometrische Axe rotiren lassen, so sind in jeder Lage der Meridianebene die eben genannten Linien senkrecht auf allen Niveauflächen. Denken wir uns nun für Punkte derselben Meridianebene die Potentialfunction V als Function der rechtwinkligen Coordinaten x und y und ist $U = f(x, y)$ die Gleichung der in derselben

Meridianebene gelegenen Kraftlinien, so ist U zu bestimmen vermittelst der Gleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y}=0,$$

oder wenn wir statt x und y die ebenen Polarcoordinaten t und ψ einführen, also setzen

$$x=t\cos\psi,\; y=t\sin\psi$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial t}\cos\psi-\frac{\partial V}{\partial \psi}\frac{\sin\psi}{t};\; \frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial t}\sin\psi+\frac{\partial V}{\partial \psi}\frac{\cos\psi}{t};$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial t}\cos\psi-\frac{\partial U}{\partial \psi}\frac{\sin\psi}{t};\; \frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial t}\sin\psi+\frac{\partial U}{\partial \psi}\frac{\cos\psi}{t};$$

und diese Werthe in die obige Gleichung einführen, indem wir noch aus der obigen Bestimmungsgleichung für V entnehmen

$$\frac{\partial V}{\partial t}=Q\left(-\frac{1}{t^2}+\frac{R\cos\psi}{t^3}\right);\; \frac{\partial V}{\partial \psi}=\frac{QR}{2t^2}\sin\psi,$$

so ist U als Function von t und ψ zu bestimmen vermittelst der Gleichung

$$\left(-1+\frac{R\cos\psi}{t}\right)\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{R}{2t^2}\sin\psi\frac{\partial U}{\partial \psi}=0.$$

Diese partielle Differentialgleichung liefert zunächst die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{dt}{d\psi}=-2t\,\frac{t-R\cos\psi}{R\sin\psi},$$

welche integrirt, eine willkürliche Integrationsconstante enthält, die, gleich U gesetzt, dann sofort die Gleichung der Kraftlinien derselben Meridianebene ergiebt.

Führt man in die letzte Differentialgleichung die neue abhängig Variable u ein vermittels der Bedingung

$$t=u\sin^2\psi,$$

also auch

$$\frac{dt}{d\psi}=\frac{du}{d\psi}\sin^2\psi+2u\sin\psi\cos\psi,$$

so wird die Differentialgleichung einfach zu

$$\frac{du}{d\psi}=-\frac{2}{R}u^2\sin\psi,$$

welche nach Sonderung der Variablen und Integration ergiebt

$$-\frac{1}{u} = \frac{2}{R}\cos\psi + \text{Const.},$$

oder wenn wieder t statt u restituirt wird

$$\frac{\sin^2\psi}{t} + \frac{2}{R}\cos\psi = -\text{Const.}$$

Setzt man nun noch — Const. gleich U, so erhält man

$$U = \frac{2}{R}\cos\psi + \frac{\sin^2\psi}{t}$$

als Gleichung der Kraftlinien, aus der die Gleichung irgend einer bestimmten Kraftlinie hervorgeht, wenn man statt U den bestimmten Werth setzt, wie er sich aus der vorigen Gleichung ergiebt, wenn man verlangt, dass die Kraftlinie durch einen bestimmten Punkt einer bestimmten Meridiancurve der Niveaufläche hindurchgehen soll.

Setzt man in der Gleichung der Kraftlinien $\sin\psi = 0$, so verschwindet aus der Gleichung derselben auch t oder die Gleichung der Kraftlinien ist alsdann erfüllt für jeden beliebigen von Null verschiedenen Werth von t; hieraus folgt, dass diejenigen Kraftlinien, für welche $\sin\psi = 0$ sein kann, gerade durch den Coordinatenanfang gehende Linien sind; es sind diess in Wirklichkeit die beiden Kraftlinien, die durch den Pol der Kugel und durch den ihm diametral gegenübergelegen Punkt der Niveaufläche hindurchgehen.

Schreiben wir die Gleichung der Kraftlinien in der Form:

$$t = \frac{\sin^2\psi}{U - \frac{2}{R}\cos\psi},$$

so erkennt man, dass, weil nur positive Werthe von t in unserem Falle Sinn haben, immer

$$\frac{2}{R}\cos\psi \leqq U$$

sein muss und dass, wenn $\frac{2}{R}\cos\psi = U$, der Radiusvector t der Kraftlinie unendlich gross wird, es nähert sich also jede Kraftlinie asymptotisch einer Geraden, die durch den Kugelmittelpunkt gehend einen Winkel Ψ, mit dem nach

dem Pole gezogenen Fahrstrahle bildet, dessen Grösse bestimmt wird durch die Gleichung

$$\cos \Psi = \frac{R}{2} \dot{U}.$$

Nehmen wir, um die Werthe von U für die einzelnen Kraftlinien zu bestimmen, als Punkte, durch die die Kraftlinien gehen sollen, nur solche an, die auf der innersten Niveaufläche liegen, so genügen diese Punkte der Gleichung

$$t_1 = R\,(1 + \sqrt{1 - \cos\psi_1}) = R\left(1 + \sqrt{2}\sin\frac{\psi_1}{2}\right),$$

wenn ihre Polarcoordinaten mit t_1 und ψ_1 bezeichnet werden. Setzen wir diesen Werth von t_1 in die obige Gleichung der Kraftlinien ein und schreiben zugleich ψ_1 statt ψ, so ist der Werth desjenigen U, oder U_1, das der durch den Punkt $t_1\psi_1$ hindurchgehenden Kraftlinie angehört:

$$U_1 = \frac{2}{R}\cos\psi_1 + \frac{\sin^2\psi_1}{R\left(1 + \sqrt{2}\sin\frac{\psi_1}{2}\right)}$$

und die Gleichung der Kraftlinie selbst ist nun

$$\frac{2}{R}\cos\psi_1 + \frac{\sin^2\psi_1}{R\left(1 + \sqrt{2}\sin\frac{\psi_1}{2}\right)} = \frac{2}{R}\cos\psi + \frac{\sin^2\psi}{t}.$$

Bezeichnet ferner Ψ_1 die Neigung gegen den durch den Pol der Kugel gehenden Fahrstrahl, der sich diese Kraftlinie asymptotisch nähert, so ist

$$\cos\Psi_1 = \cos\psi_1 + \frac{\sin^2\psi_1}{2\left(1 + \sqrt{2}\sin\frac{\psi_1}{2}\right)},$$

hierin bezeichnet zugleich ψ_1 die anfängliche Neigung des Fahrstrahles nach dem der Kugel zunächst gelegenen Punkte der Kraftlinie gegen den durch den Pol gehenden Fahrstrahl und da

$$\frac{\sin^2\psi_1}{2\left(1 + \sqrt{2}\sin\frac{\psi_1}{2}\right)}$$

für Werthe von ψ_1 für welche $0 \leq \psi_1 \leq 2\pi$ immer positiv ist, so erkennt man, dass die Neigung, der sich die Kraftlinien asymptotisch nähern, nach dem durch den Pol gehen-

den Fahrstrahl hingewendet ist. Die Abweichung der asymptotisch angenäherten Neigung von der anfänglichen ist am stärksten für mittlere Werthe von ψ_1 zwischen 0 und 2π, während, wenn $\psi_1 = 0$ oder $\psi_1 = 2\pi$, beide Neigungen für den ganzen Verlauf der beiden Kraftlinien zusammenfallen.

Wir bestimmen nun noch die Dichtheit der Elektricität auf einem Leiter, der zur Oberfläche eine Niveaufläche der Potentialfunction V hat und mit der Elektricitätsmenge Q geladen worden ist.

Da der stattfindenden Symmetrieverhältnisse wegen auch die elektrische Dichtheit ϱ in allen Punkten, die auf derselben Normalebene zur geometrischen Axe liegen, dieselbe sein muss, so reicht es aus, den Ausdruck $\frac{\partial V}{\partial n}$ nur für eine einzige Meridiancurve zu bestimmen; nehmen wir für diese Meridiancurve diejenige, die nur die beiden rechtwinklig räumlichen Coordinaten x und y enthält, für die aber alle z der Null gleich sind, so können wir schreiben

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2.$$

Führen wir rechter Hand die Polarcoordinaten t und ψ ein, so ist

$$x = t\cos\psi,\ y = t\sin\psi$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \cos\psi;\ \frac{\partial x}{\partial\psi} = -t\sin\psi;\ \frac{\partial y}{\partial t} = \sin\psi;\ \frac{\partial y}{\partial\psi} = t\cos\psi$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t};\ \frac{\partial V}{\partial\psi} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\psi} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\psi}.$$

Ermittelt man aus diesen Gleichungen $\frac{\partial V}{\partial x}$ und $\frac{\partial V}{\partial y}$ als Functionen von $\frac{\partial V}{\partial r}$, $\frac{\partial V}{\partial\psi}$, t und ψ, und setzt die erlangten Werthe in die vorige Gleichung für $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2$ ein, so erhält man

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{t\partial\psi}\right)^2$$

und wenn man die Werthe von $\frac{\partial V}{\partial t}$ und $\frac{\partial V}{\partial\psi}$ aus der früheren Gleichung für V entnimmt, nämlich

$$\frac{\partial V}{\partial t} = Q\left(-\frac{1}{t^2} + \frac{R\cos\psi}{t^3}\right) = -\frac{Q}{t}\left(\frac{V}{Q} - \frac{R\cos\psi}{2t^2}\right)$$

$$\frac{\partial V}{t\partial\psi} = \frac{QR}{2t^3}\sin\psi,$$

so wird

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 = \frac{1}{t^2}\left\{V^2 + \frac{Q^2R^2}{4t^4} - 2.\ V.\ \frac{QR}{2t^2}\cos\psi\right\}.$$

Es ist also $\frac{\partial V}{\partial n}$ der $t$te Theil der Seite eines Dreieckes, der der Winkel ψ gegenüber liegt und dessen beide anderen Seiten V und $\frac{QR}{2t^2}$ sind. Giebt man diesem Ausdruck dasselbe Vorzeichen, welches Q besitzt und multiplicirt ihn mit $\frac{1}{4\pi}$, so erhält man die gesuchte elektrische Dichtheit im Punkte $t\psi$; multiplicirt man dagegen den vorigen Werth von $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2$ mit $\frac{1}{4\pi}$, so erhält man die Grösse Kraft, die auf das Elektricitätstheilchen im Punkte $t\psi$ in der Richtung der durch diesen Punkt gehenden Kraftlinie nach aussen wirksam ist.

Man kann sich leicht überzeugen, dass die elektrische Dichtheit allmählich wächst, je mehr man sich von dem durch den Pol der Kugel gelegten Fahrstrahl entfernt, dass ferner die einzelnen Theile der Leiteroberfläche um so gleichförmiger mit Elektricität behaftet sind, je kleiner V ist, d. h. je mehr sich die Leiteroberfläche der Kugelform nähert. Von besonderem Interesse sind noch die eben besprochenen Verhältnisse für die eingebogene Spitze der innersten Niveaufläche, setzen wir, wie es in diesem Falle sein muss,

$$V = \frac{Q}{2R},\ \psi = 0,\ t = R,$$

so entsteht

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 = 0,$$

an jenem Punkte haftet also gar keine Elektricität und es verschwindet natürlich auch die auf die Spitze von der vorhandenen Elektricität ausgeübte Kraftwirkung.

4) Die Vertheilung der Elektricität auf einem dreiaxigen Ellipsoid.

Wir benützen zur Lösung der vorliegenden Aufgabe die Sätze, welche in §. 10., Cap. I. über die Niveauflächen und Niveauschichten entwickelt wurden und bestimmen da zunächst die Potentialfunction einer homogenen Massenschicht, die, zwischen zwei ähnlich gelegenen Ellipsoiden enthalten, die gegebene Ellipsoidfläche zur Niveaufläche hat.

Es seien die Gleichungen der beiden Ellipsoidflächen, die die gesuchte Niveauschicht einschliessen,

$$1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = h_0^2$$

$$2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = h_1^2,$$

dann ist für den vorliegenden Fall

$$3, \quad f = F - \psi(h) = F - h^2 = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - h^2 = 0,$$

und es müssen nun A, B und C so als Functionen von λ bestimmt werden, dass die Gleichungen gelten:

$$4, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = - H \frac{\partial F}{\partial \lambda}$$

$$5, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = H\,\varphi(\lambda).$$

Zugleich sei λ eine solche Function von ϱ_1, dass

für $\lambda = 0$

$$6, \quad A = \frac{1}{a^2}\,;\; B = \frac{1}{b^2}\,;\; C = \frac{1}{c^2}\,;$$

für $\lambda = \infty$

$$x = y = z = \infty.$$

Die Gleichung 4, giebt aber vermittels 3,

$$4\,(A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2) = - H\left(\frac{dA}{d\lambda}x^2 + \frac{dB}{d\lambda}y^2 + \frac{dC}{d\lambda}z^2\right)$$

folglich

$$H\frac{dA}{d\lambda} = -4A^2;\; H\frac{dB}{d\lambda} = -4B^2;\; H\frac{dC}{d\lambda} = -4C^2.$$

Durch Integration folgt hieraus, wenn man die erste der Bedingungen 6, berücksichtigt:

$$A = \frac{1}{a^2+\lambda}\,;\; B = \frac{1}{b^2+\lambda}\,;\; C = \frac{1}{c^2+\lambda}\,.$$

damit entsteht aus 3, die Gleichung:

$$7, \quad \frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = h^2,$$

welche zeigt, dass auch die zweite der Bedingungen 6, erfüllt ist, so dass nur noch die aus 5, folgende Gleichung

$$8, \quad \frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda} = 2\varphi(\lambda)$$

zu berücksichtigen bleibt.

Die Gleichung 7, besagt, dass die gesuchte Niveauschicht eingeschlossen wird von zwei homofocalen Ellipsoiden. Die Potentialfunction dieser Niveauschicht ist für den äusseren Raum

$$V_a = C\int_\lambda^\infty e^{-\int \varphi(\lambda)\, d\lambda}\, d\lambda = C\int_\lambda^\infty e^{l\frac{1}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}}\, d\lambda$$

also

$$V_a = C\int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},$$

wenn die untere Integrationsgrenze λ bestimmt wird durch dasjenige λ, das durch das durch den Punkt $\xi\,\eta\,\zeta$, auf welchen sich V_a bezieht, gelegte homofocale Ellipsoid bestimmt wird, also durch die Gleichung:

$$9, \quad \frac{\xi^2}{a^2+\lambda} + \frac{\eta^2}{b^2+\lambda} + \frac{\zeta^2}{c^2+\lambda} = h^2.$$

Die Integrationsconstante C kann durch die Bedingung bestimmt werden, dass die Potentialfunction V_a auf einen unendlich entfernten Punkt, multiplicirt mit dem Radiusvector des unendlich entfernten Punktes gleich ist der wirksamen Masse M; setzen wir in unserem Falle die Dichtheit dieser Masse gleich 1, so ist M gleich dem Volumen der Niveauschicht, also

$$M = \tfrac{4}{3}\pi\,(a[h+dh]\,b[h+dh]\,c[h+dh]) - \tfrac{4}{3}\pi\, ah\, bh\, ch.$$

oder

$$M = 4\pi abc h^2 dh.$$

Rückt der Punkt $\xi\,\eta\,\zeta$ in unendliche Entfernung, so giebt die Gleichung 9, für die verschiedenen Halbaxen des zugehörigen Ellipsoides dieselbe Grenze, nämlich den Radiusvector l des Punktes $\xi\,\eta\,\zeta$ oder es ist

$$\lim h^2(a^2+\lambda) = \lim h^2(b^2+\lambda) = \lim h^2(c^2+\lambda) = l^2,$$

folglich durch Differentiation

$$\lim h^2 d\lambda = 2 l dl,$$

so dass wir erhalten

$$\lim V_a l = 4\pi abch^2 dh = Cl \int_l^\infty \frac{2h\,dl'}{l'^2} = 2hC$$

folglich

$$C = 2\pi abchdh$$

und demnach

$$10, \qquad V_a = 2\pi abc\,hdh \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

Setzt man die untere Integrationsgrenze gleich Null, so erhält man den constanten Werth, den V_a auf der Oberfläche des Ellipsoides selbst, also auch im ganzen inneren Raum des Ellipsoides besitzt, nämlich

$$11, \qquad V' = 2\pi abchdh \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

Die Gleichungen 10, und 11, haben uns nun eine Potentialfunction verschafft, die auf und innerhalb des Ellipsoides constant ist, sie giebt daher einfach die Dichtheit, mit der sich Elektricität über ein Ellipsoid verbreitet, in der Form

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n},$$

indem wir im jetzigen Falle haben

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \left(\frac{\partial V}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial n}\right)_{\lambda=0} = \left[\frac{\partial V}{\partial \lambda}\left(\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]_{\lambda=0}$$

$$= -\left[\frac{2\pi abchdh}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}\left(\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]_{\lambda=0}$$

und

$$\varrho = \frac{hdh}{2}\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2\right]_{\lambda=0}^{\frac{1}{2}}.$$

Für das Ellipsoid, für welches $h = 1$, also die Gleichung gibt:

$$f = \left[\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1\right]_{\lambda=0}$$

entsteht daher, weil

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial \lambda}}; \frac{\partial \lambda}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial \lambda}}; \frac{\partial \lambda}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial \lambda}};$$

und wenn man

$$K = \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

setzt,

$$\left[\sqrt{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2}\right]_{\lambda=0} = \frac{2}{K},$$

so dass die elektrische Dichtheit auf einem Ellipsoid sich herausstellt zu

$$12, \qquad \varrho = h\,d\,h.\,\frac{1}{K}.$$

Dieser Werth von ϱ lässt eine interessante geometrische Deutung zu.

Bedeuten nämlich l, m, n, die Cosinus der Winkel, welche die Normale des Ellipsoides

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

im Punkte x, y, z, dessen elektrische Dichtheit ϱ ist, mit den drei Coordinatenaxen bildet, so findet man:

$$l = \frac{x}{a^2}\cdot\frac{1}{K};\; m = \frac{y}{b^2}\cdot\frac{1}{K};\; n = \frac{z}{c^2}\cdot\frac{1}{K},$$

woraus mit Hülfe der Gleichung des Ellipsoides folgt:

$$13, \qquad l^2a^2 + m^2b^2 + n^2c^2 = \frac{1}{K^2}.$$

Die Gleichung der zur Tangentialebene im Punkte $x\,y\,z$ parallelen und durch das Ellipsoidcentrum gelegten Ebene ist weiter

$$lx + my + nz = 0.$$

Führen wir nun in die Gleichung des Ellipsoides die neuen rechtwinkligen Coordinaten X, Y, Z ein, nach den Relationen:

$$\begin{aligned} X &= lx + my + nz \\ Y &= l'x + m'y + n'z \\ Z &= l''x + m''y + n''z, \end{aligned}$$

aus denen bekanntlich folgt

$$x = lX + l'Y + l''Z$$
$$y = mX + m'Y + m''Z$$
$$z = nX + n'Y + n''Z,$$

so entsteht, wenn wir $X = 0$ setzen, die Gleichung des Centralschnittes durch eine Ebene, welche der Tangentialebene im Punkte $x\,y\,z$ parallel ist; wir denken uns, wie es immer möglich ist, die noch innerhalb gewisser Grenzen willkürlichen Cosinus $l', m', n', l'', m'', n''$ so bestimmt, dass die Gleichung des Querschnittes die Form hat

$$14, \qquad MY^2 + NZ^2 = 1.$$

Dann hat die Gleichung des Ellipsoides selbst die Form:

$$f = LX^2 + MY^2 + NZ^2 + 2PXY + 2QXZ = 1$$

und hieraus folgt durch Differentiation nach Y

$$\frac{\partial f}{\partial x} l' + \frac{\partial f}{\partial y} m' + \frac{\partial f}{\partial z} n' = 2MY + 2PX.$$

Oder da

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2};\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2};\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{c^2};$$

$$x.\frac{l'}{a^2} + y.\frac{m'}{b^2} + z.\frac{n'}{c^2} = x(Ml' + Pl) + y(Mm' + Pm) + z(Mn' + Pn),$$

folglich gelten die Gleichungen

$$(1 - Ma^2)\,l' - Pla^2 = 0$$
$$(1 - Mb^2)\,m' - Pmb^2 = 0$$
$$(1 - Mc^2)\,n' - Pnc^2 = 0,$$

zu denen noch kommt

$$ll' + mm' + nn' = 0.$$

Aus diesen letzteren Gleichungen folgt aber

$$\frac{l^2 a^2}{1 - Ma^2} + \frac{m^2 b^2}{1 - Mb^2} + \frac{n^2 c^2}{1 - Mc^2} = 0.$$

Verfährt man, wie eben im Bezug auf Y, so auch im Bezug auf Z, so entsteht:

$$\frac{l^2 a^2}{1 - Na^2} + \frac{m^2 b^2}{1 - Nb^2} + \frac{n^2 c^2}{1 - Nc^2} = 0.$$

Die beiden letzten Gleichungen zeigen, dass M und N die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\frac{l^2 a^2}{1 - S a^2} + \frac{m^2 b^2}{1 - S b^2} + \frac{n^2 c^2}{1 - S^2 c^2} = 0$$

sind, oder der Gleichung

$$S^2 (a^2 b^2 c^2) - S[l^2 a^2 (b^2 + c^2) + m^2 b^2 (c^2 + a^2) + n^2 c^2 (a^2 + b^2)]$$
$$+ l^2 a^2 + m^2 b^2 + n^2 c^2 = 0.$$

Das Produkt der beiden Wurzeln M und N ist daher, wenn man die Gleichung 13, beachtet:

$$MN = \frac{1}{K^2 a^2 b^2 c^2}.$$

Sind ferner a_1 und b_1 die beiden Haupthalbaxen des von der zur Tangentialebene im Punkte xyz parallel gelegten Centralebene bewirkten elliptischen Querschnittes, so ist auch

$$MN = \frac{1}{a_1^2 b_1^2},$$

folglich entsteht aus den beiden letzten Gleichungen:

$$K = \frac{a_1 b_1}{abc}$$

und damit wird aus 12,

$$14, \qquad \varrho = hdh. \frac{abc}{a_1 b_1}.$$

Das hierin enthaltene Resultat kann man in die Worte fassen: „auf einem Ellipsoid vertheilt sich die Elektricität so, dass ihre Dichtheit in irgend einem Punkte umgekehrt proportional ist dem Flächeninhalte des Centralschnittes, der der in jenem Punkte möglichen Tangentialebene parallel ist.“

Speciell hat man daher das Verhältniss der elektrischen Dichtheiten in den Endpunkten der Hauptaxen des Ellipsoides:

$$\varrho_a : \varrho_b : \varrho_c = \frac{1}{bc} : \frac{1}{ca} : \frac{1}{ab} \text{ d. i.}$$

$$\varrho_a : \varrho_b : \varrho_c = a : b : c.$$

und nach 5, §. 4. Cap. II. sind die Kräfte k_a, k_b, k_c, welche auf die in den Enden der Hauptaxe befindlichen Elektricitäten wirken, ihrem Verhältnisse nach

$$k_a : k_b : k_c = a^2 : b^2 : c^2$$

ein schon von Poisson in den Memoiren von 1811 première partie mitgetheiltes Resultat.

Nach einer bekannten geometrischen Eigenschaft confocaler Ellipsoide werden diese Flächen rechtwinklig durchschnitten von den beiden confocalen Hyperboloiden mit einem und mit zwei Mänteln und es schneiden sich auch überhaupt diese drei Flächen unter sich rechtwinklig. Demnach sind die Kraftlinien der auf einem isolirten dreiaxigen Ellipsoid im Gleichgewichtszustande vertheilten Elektricität die Durchschnittslinien der beiden confocalen Hyperboloide.

§. 3.

Erweiterung der in §. 1 behandeltem Bestimmungsmethode der Vertheilung der Elektricität für mehrere gesonderte Oberflächen.

Die in §. 1 auseinandergesetzte Bestimmungsmethode der Dichtheit der Elektricität auf Oberflächen, wenn sie sich daselbst im Gleichgewichtszustande befinden soll, behandelte diesen Fall unter den Voraussetzungen, dass man die Potentialfunction der richtig vertheilten Elektricität bereits kennt und dass die Oberflächen, über welche die Vertheilung stattfinden soll, Niveauflächen dieser bekannten Potentialfunction seien. Ist nun aber die gesammte gegebene elektrische Masse Q, welche die Potentialfunction V erzeugt, so beschaffen, dass sie in die einzelnen Theilmassen Q_1, Q_2, Q_3, ... zerfällt, die für sich gesondert von den geschlossenen Niveauflächen S_1, S_2, S_3, ... der Reihe nach umschlossen werden, so kann man auch mit leichter Mühe die Vertheilung der Elektricität im Gleichgewichtszustande auf den Flächen S_1, S_2, S_3, ... bestimmen, diese Flächen betrachtet als Oberflächen von Leitern für Elektricität. Ueberdeckt man nämlich allgemein die Fläche S_r mit Elektricität von der Dichtheit ϱ_r, wo $\varrho_r = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n_r}$ und n_r die auf

S_r nach aussen errichtete Normale bezeichnet, während V die Gesammtpotentialfunction aller ursprünglich angenommener Massen ist, so ist die auf den Leiteroberflächen S_1, $S_2, S_3, \ldots$ haftende Elektricität im Gleichgewicht, wie der Satz 1, §. 4. Cap. II. lehrt. Denken wir uns die Gesammtpotentialfunction V zerlegt in ihre einzelnen Theile V_1, V_2, $V_3, \ldots$, wo allgemein V_s herkommt von der über S_s verbreiteten Elektricität, so ist die auf dem r^{ten} Leiter vorhandene Elektricitätsmenge

$$M_r = -\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial V_1}{\partial n_r} + \frac{\partial V_2}{\partial n_r} + \ldots + \frac{\partial V_r}{\partial n_r} + \ldots\right) d\sigma_r$$

Nach I. §. 3. Cap. I. ist aber, so lange s und r von einander verschieden sind

$$\int\frac{\partial V_s}{\partial n_r}\, d\sigma_r = 0;$$

demnach ist

$$M_r = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial V_r}{\partial n_r}\, d\sigma_r = Q_r$$

nach I, §. 3. Cap. I.

Die auf jeder einzelnen Leiteroberfläche S_r vorhandene Elektricitätsmenge ist also gleich dem von ihr umschlossenen Theile der ursprünglich angenommenen elektrischen Massen.

Es ist auch ersichtlich, dass der constante Werth der Potentialfunction V nicht für alle einzelnen Flächen S_1, S_2, $S_3, \ldots$ derselbe sein muss, denn die Bedingung für das Gleichgewicht der Elektricität auf diesen Leiterflächen wird auch auf die angegebene Weise erfüllt, wenn der constante Werth der Potentialfunction für die einzelnen Flächen S_1, S_2, $S_3, \ldots$ ein verschiedener ist.

Bedeuten ferner S_1 und S_2 zwei Niveauflächen der Potentialfunction V, die einander vollständig umschliessen und kommt die Potentialfunction V her von Massen Q_1, die ganz innerhalb der umschlossenen Niveaufläche S_1 und von Massen Q_2, die ganz ausserhalb der umschliessenden Niveaufläche S_2 liegen, so kann man sich S_2 als die innere Begrenzungsfläche eines hohlen Leiters denken, in dessen Höhlung isolirt ein zweiter elektrischer Leiter liegt, der die Oberfläche S_1 besitzt. Es sei ferner V für alle Punkte der Fläche S_2

gleich α_2, für alle Punkte der Fläche S_1 gleich α_1. Alsdann findet elektrisches Gleichgewicht statt, wenn man die Fläche S_1 belegt mit Elektricität von der Dichtheit $\varrho_1 = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n_1}$, wo n_1 die auf S_1 nach aussen errichtete Normale bezeichnet, und wenn die Fläche S_2 versehen wird mit Elektricität von der Dichtheit $\varrho = +\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n_2}$, wo n_2 die auf S_2 in den inneren mit ponderabler Masse erfüllten Raum des umschliessenden Leiters hinein errichtete Normale bezeichnet.

Es ist nämlich zunächst nach dem Satze I, §. 3. Cap. I. die gesammte Elektricitätsmenge auf der umschlossenen Fläche S_1 gleich Q_1, dagegen die auf der umschliessenden Fläche S_2 gleich $-Q_1$. Die Potentialfunction dieser letzteren über S_2 vertheilten Elektricitätsmenge hat für alle Punkte von S_2 denselben Werth, nämlich $-\alpha_2$, folglich nach 1, §. 4. Cap. II. auch für alle im Innern des von S_2 umschlossenen Raumes gelegenen Punkte. Die gesammte Potentialfunction der vorhandenen elektrischen Massen Q_1, $-Q_1$ und Q_2 beträgt demnach für Punkte des Raumes, der zwischen den beiden Flächen S_1 und S_2 liegt, $V-\alpha_2$, also für alle Punkte auf der Fläche S_1, $\alpha_1-\alpha_2$, für alle Punkte auf der Fläche S_2, $\alpha_2-\alpha_2=0$.

Denken wir uns die Elektricitätsmenge Q_2 für sich im Gleichgewichtszustand über die äussere Oberfläche S des schalenförmigen Leiters verbreitet und sei der Werth der von dieser Elektricitätsmenge herkommenden Potentialfunction für alle Punkte, die der Fläche S selbst oder dem ganzen von ihr umschlossenen Raume angehören α, so ist jede beliebige Fläche, die innerhalb dieses Raumes liegt, auch eine Niveaufläche dieser Potentialfunction, es wird also die Gestalt der inneren Begrenzungsfläche der Schale, S_2, allein bedingt durch den Umstand, dass sie Niveaufläche der Potentialfunction U ist, die herkommt von den im Innern des von der Schale umschlossenen Raumes angenommenen elektrischen Massen Q_1. Ist nun auch S_1 eine Niveaufläche der Function U, die die Masse Q_1 ganz umschliesst und beträgt der Werth von U für alle Punkte der

Fläche S_1 α_1, für alle Punkte der Fläche S_2 α_2, so entsteht auf den Flächen S_1 und S_2 elektrisches Gleichgewicht, wenn wir ganz wie im vorigen Fall verfahren, indem wir statt V jetzt U schreiben, es beträgt aber jetzt der Werth der Potentialfunction der elektrischen Massen auf S_1 S_2 und S für alle Punkte der Fläche S_1 $\alpha + \alpha_1 - \alpha_2$, für alle Punkte der Fläche S_2 $\alpha + \alpha_2 - \alpha_2 = \alpha$ und derselbe Werth α gilt überhaupt für alle Punkte des schalenförmigen Leiters, weil nach §. 9. Cap. I. die Potentialfunction der auf S_1 und S_2 befindlichen Elektricität für alle Punkte auf und ausserhalb der Fläche S_2 verschwindet. Ist der schalenförmige Leiter zur Erde abgeleitet oder $\alpha = 0$, so ist auch $Q_2 = 0$ und auf der äussern Begrenzungsfläche zeigt sich gar keine Elektricität, ist α von Null verschieden, so ist die auf der äussern Begrenzungsfläche im Zustande des Gleichgewichtes vertheilte Elektricitätsmenge die um Q_1 vermehrte der dem umschliessenden Leiter ursprünglich mitgetheilten Menge. Vergl. §. 6. Cap. II.

Es hat keine Schwierigkeit den eben besprochenen Fall des elektrischen Gleichgewichtes auch dahin auszudehnen, dass mehrere schalenförmige Leiter einander isolirt umschliessen.

Wir schliessen ähnlich wie in §. 1. an diese Betrachtungen noch eine Anzahl von Sätzen, die Chasles [1]) gegeben hat und die sich auf Niveauschichten beziehen, welche nur Theile der die Gesammtpotentialfunction V bewirkenden Massen umschliessen und deren elektrische Dichtheit durch $\varrho = \varepsilon \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0}$ dargestellt werden möge, wo ε ein constanter Factor ist.

Denkt man sich den unendlich dünnen Canal gebildet, der an seinen Enden begrenzt wird durch correspondirende Elemente zweier Niveauflächen, dessen Seitenwände durch die stetige Aufeinanderfolge der Kraftlinien dargestellt werden, die man durch die Begrenzungen der correspondirenden Elemente legen kann und wendet man nun auf diesen Canal den Gauss'schen Satz I, §. 3. Cap. I. an, so erhält man leicht, weil das Integral, dass sich auf die Seitenwände

1) Am angeführten Orte.

des Canals bezieht. verschwindet, und weil für die correspondirenden Elemente die Normalen nach entgegengesetzten Seiten genommen werden müssen:

Die Differenz der Kraftwirkungen der gegebenen Masse auf zwei correspondirende Elemente ist gleich dem Produkt aus 4π in den Theil der gegebenen Masse, der in dem Canal zwischen den beiden correspondirenden Elementen eingeschlossen ist. Umschliessen beide Niveauflächen, zu denen die correspondirenden Elemente gehören, die ganze gegebene Masse, so sind die Kraftwirkungen auf beide correspondirende Elemente einander gleich.

Die Potentialfunction einer Niveauschicht auf irgend einen Punkt M können wir in leicht verständlichen Zeichen darstellen durch

$$V_1 = \int \frac{dm_1}{r} = \varepsilon \int \frac{\partial V}{\partial n} \frac{d\sigma}{r}.$$

Bilden wir das Differential dieses Ausdruckes, indem wir übergehen zu einer die eben betrachtete Niveauschicht unendlich nahe umschliessenden Niveauschicht, so entsteht

$$A, \qquad \partial V_1 = \varepsilon \int \frac{1}{r} \, \partial \left(\frac{\partial V}{\partial n} \, d\sigma \right) - \varepsilon \int \frac{\partial r}{r^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial n} \, d\sigma.$$

Nach dem vorigen Satze ist aber

$$\partial \left(\frac{\partial V}{\partial n} \, d\sigma \right) = 4\pi \, dm_2,$$

wenn dm_2 das Massenelement bezeichnet, das der gegebenen, die Potentialfunction V erzeugenden Masse angehörig, liegt zwischen den beiden einander unendlich nahen Niveauflächen in dem Canale mit der Endfläche $d\sigma$. Es ist demnach auch

$$\int \frac{1}{r} \, \partial \left(\frac{\partial V}{\partial n} \, d\sigma \right) = 4\pi \int \frac{dm_2}{r}.$$

Bezeichnet nun ∂V_2 die Potentialfunction desjenigen Theiles der gegebenen Masse auf den Punkt M, der zwischen den beiden einander unendlich nahen Niveauflächen liegt, so ist

$$\int \frac{dm_2}{r} = \partial V_2,$$

oder

$$\text{B,} \quad \int \frac{1}{r} \, \partial \left(\frac{\partial V}{\partial n} \, d\sigma \right) = 4\pi \partial V_2 .$$

Bezeichnet $(\hat{NM})$ den Winkel, der eingeschlossen wird von dem aus dem Punkte M herkommenden Fahrstrahl und der nach aussen auf der ursprünglichen Niveaufläche errichteten Normalen, so ist (vergl. die Betrachtungen im Anfange von §. 3. Cap. I.)

$$\partial r = \partial n \cos (\hat{NM}),$$

folglich

$$\int \frac{\partial r}{r^2} \, \frac{\partial V}{\partial n} \, d\sigma = \int \partial V . \, \frac{\cos (\hat{NM})}{r^2} \, d\sigma .$$

Da wir aber von der ursprünglichen Niveaufläche zur Herleitung des Differentiales von V_1 ebenfalls auf eine Niveaufläche übergegangen sind, so ist ∂V im letzten Integrale ein constanter Werth, folglich auch

$$\int \frac{\partial r}{r^2} \, \frac{\partial V}{\partial n} \, d\sigma = \partial V \int \frac{\cos (\hat{NM})}{r^2} \, d\sigma .$$

Nun ist nach §. 3. Cap. I.

$$\int \frac{\cos (\hat{NM})}{r^2} \, d\sigma = \begin{cases} 0 & \text{wenn } M \text{ ausserhalb} \\ 4\pi & \text{,, \quad ,, innerhalb} \end{cases}$$

der ursprünglich angenommenen Niveaufläche liegt.

Wir erhalten somit

$$\text{C,} \quad \int \frac{\partial r}{r^2} \, \frac{\partial V}{\partial n} \, d\sigma = \begin{matrix} 0 \\ 4\pi \partial V \end{matrix} \text{ wenn } M \begin{Bmatrix} \text{ausserhalb} \\ \text{innerhalb} \end{Bmatrix}$$

der ursprünglich angenommenen Niveaufläche liegt.

Liegt der Punkt M innerhalb der ursprünglichen Niveaufläche, so ergiebt die Gleichung A, in Verbindung mit B, und C,

$$\partial V_1 = 4\pi\varepsilon \partial V_2 - 4\pi\varepsilon \partial V,$$

folglich durch Integration

$$\text{D,} \quad V_1 - V_1' = 4\pi\varepsilon V_2 - 4\pi\varepsilon (V - V'),$$

wenn V und V' die Werthe der Potentialfunction der gesammten ursprünglich angenommenen Massen auf Punkte

der innern und der äussern Niveaufläche bezeichnen, wenn die Potentialfunctionen der auf diesen Niveauflächen construirten Niveauschichten selbst V_1' und V_1 sind und wenn V_2 bezeichnet die Potentialfunction des zwischen den genannten beiden Niveauflächen enthaltenen Theiles der ursprünglich angenommenen Masse, die letzteren drei Potentialfunctionen bezogen auf einen beliebigen Punkt M ausserhalb der beiden Niveauflächen.

Liegt der Punkt M ausserhalb der ursprünglichen Niveaufläche, so ergeben die Gleichungen A, B, und C,

$$\partial V_1 = 4\pi\varepsilon\partial V_2$$

und durch Integration

$$\text{E,} \qquad V_1 - V_1' = 4\pi\varepsilon V_2,$$

wo V_1, V_1' und V_2 die vorhin genannte Bedeutung haben. In diesem letzteren Falle muss, wie leicht ersichtlich (aus der Bedingung, unter welcher die zu Grunde gelegte Differentialgleichung gilt), der Punkt M, auf den sich die Potentialfunctionen V_1, V_1' und V_2 beziehen, noch ausserhalb der äussern Niveaufläche mit der Potentialfunction V_1 liegen.

Die letztere Gleichung ändert sich aber nur um eine unendlich kleine Grösse, wenn wir den Punkt M auf der äussern Niveaufläche selbst gelegen sein lassen, wir können daher die Richtigkeit dieser Gleichung ohne weiteres auch für diesen Fall behaupten. Gleiches gilt von der Gleichung D, wenn der Punkt M etwa auf die innere Niveaufläche zu liegen kommt.

Liegt der Punkt M zwischen beiden Niveauflächen oder Niveauschichten, so legen wir durch diesen Punkt eine dritte Niveauschicht und wenden die Gleichung E, an auf den Raum zwischen der ersten und dritten und zugleich die Gleichung D, auf den Raum zwischen der dritten und zweiten Niveauschicht, addiren wir beide Ergebnisse, so entsteht

$$\text{F,} \qquad V_1 - V_1' = 4\pi\varepsilon V_2 - 2\pi\varepsilon\,(V - V')$$

wenn V_1 und V_1' die Potentialfunctionen der ersten und zweiten Niveauschicht, V_2 die des zwischen beiden Niveauschichten gelegenen Theiles der ursprünglichen Masse bezeichnet und V und V' die constanten Werthe sind, welche

die Potentialfunction der gesammten ursprünglichen Masse auf der zweiten und dritten Niveauschicht besitzen.

Berücksichtigt man, dass bei einer Differentiation der Gleichungen D, E, F, nach den Coordinaten von *M* die Glieder, welche den Factor $V - V'$ enthalten, ganz wegfallen, so kann man aus diesen Gleichungen den Satz gewinnen:

Die Kraftwirkung, die auf einen beliebigen Punkt ausgeübt wird von demjenigen Theil der ursprünglich angenommenen Masse, der zwischen zwei Niveauflächen der ganzen Masse liegt, multiplicirt mit $4\pi\varepsilon$ ist gleich der Resultante der Kraftwirkungen der auf jenen Niveauflächen construirten Niveauschichten, wenn man die Kraftwirkung der innern Niveauschicht mit entgegengesetztem Vorzeichen versieht.

Nimmt man zur innern Niveauschicht diejenige, welche die innerste ist, d. h. welche von allen anderen noch möglichen Niveauschichten umschlossen wird, und die sich auf Punkte oder Linien reduciren kann, so ist auf ihr nothwendig der Werth der Potentialfunction ein Maximum oder Minimum, also $\frac{\partial V}{\partial n}$ für diese Niveauschicht gleich Null, folglich auch die von ihr herkommende Potentialfunction, oder $V_1' = 0$. Der jetzt von den beiden in Betracht kommenden Niveauschichten umschlossene Theil der ursprünglich angenommenen Masse ist der ganze von der äussern Niveaufläche umschlossene Theil. Wir erhalten daher aus dem obigen allgemeinen Satz noch den specielleren:

Die Kraftwirkung, die auf einen beliebigen Punkt ausserhalb einer Niveauschicht ausgeübt wird von demjenigen Theil der ursprünglich angenommenen Masse, der innerhalb der Niveauschicht liegt multiplicirt mit $4\pi\varepsilon$ ist gleich der Kraftwirkung, die von der Niveauschicht auf denselben Punkt ausgeübt wird.

Nehmen wir ferner zur äussern Niveauschicht eine solche, die die ganze ursprünglich angenommene Masse umschliesst, so übt diese bekanntlich auf irgend einen in dem von ihr umschlossenen Raume gelegenen Punkt gar keine Wirkung

aus. Wir erhalten daher aus dem obigen allgemeinen Satz auch noch die Specialität:

Die Kraftwirkung, die auf einen beliebigen Punkt innerhalb einer Niveauschicht ausgeübt wird von dem Theile der ursprünglich angenommenen Masse, der ausserhalb der Niveauschicht liegt, multiplicirt mit $4\pi\varepsilon$ ist gleich gross und entgegengesetzt gerichtet wie die von der Niveauschicht herkommende Kraftwirkung auf denselben Punkt.

Setzt man noch $4\pi\varepsilon = 1$, so kann man die beiden letzten Sätze in den einen zusammenfassen:

Irgend eine Niveauschicht übt auf ausser ihr gelegene Punkte dieselbe Wirkung aus, wie der Theil der ursprünglich angenommenen Masse, den sie umschliesst, und auf Punkte in ihrem Innern eine gleich grosse und entgegengesetzt gerichtete, als der ausserhalb ihrer gelegene Theil der ursprünglich angenommenen Masse.

Diesen letzteren Satz gab J. Bertrand, er kann auch als eine einfache Folgerung aus dem Green'schen Lehrsatze dargestellt werden.

§. 4.

Beispiele zu den im vorigen Paragraphen genannten allgemeinen Sätzen.

Wir nehmen in zwei Punkten A_1 und A_2, die um die Strecke $2a$ von einander entfernt sind, die beiden Massenpunkte Q_1 und Q_2 an. Ein rechtwinklig räumliches Coordinatensystem, dessen X Axe durch die beiden Punkte A_1 und A_2 geht, und dessen Anfang mitten zwischen diese beiden Punkte fällt, bestimme die Lage irgend eines Raumpunktes durch die Coordinaten x und $r = \sqrt{y^2 + z^2}$. Die Potentialfunction der beiden angenommenen Massenpunkte ist jetzt

$$V = \frac{Q_1}{\sqrt{(x-a)^2 + r^2}} + \frac{Q_2}{\sqrt{(x+a)^2 + r^2}}.$$

Setzt man V gleich einer Constanten α, so entsteht die

Gleichung, welche die Schaar sämmtlicher Niveauflächen repräsentirt, nämlich

$$\alpha = \frac{Q_1}{\sqrt{(x-a)^2+r^2}} + \frac{Q_2}{\sqrt{(x+a)^2+r^2}} \cdot$$

Die Niveauflächen sind demnach sämmtlich Rotationsflächen, deren geometrische Axe die durch die Punkte A_1 und A_2 gehende Gerade ist. Die Gestalt dieser Niveauflächen ändert sich mit dem gegenseitigen Grössenverhältniss der Massen Q_1 und Q_2. Wir betrachten fernerhin nur die beiden Fälle: $Q_1 = \pm Q_2$, indem die für diese beiden Fälle erscheinenden Kraftlinien zugleich die sogenannten magnetischen Curven liefern.

Für die angenommenen Fälle lautet die Gleichung der Schaar der Niveauflächen

$$\frac{\alpha}{Q} = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+r^2}} \pm \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+r^2}} \cdot$$

Ist $\sqrt{(x-a)^2+r^2} = p$ der von A_1 ausgehende Fahrstrahl, $\sqrt{(x+a)^2+r^2} = q$ der von A_2 ausgehende, so können wir die vorige Gleichung einfacher schreiben als

$$1, \quad \frac{\alpha}{Q} = \frac{q \pm p}{qp} = \frac{1}{p} \pm \frac{1}{q},$$

in welcher Form die Gleichung der Niveauflächenschaar an die bekannte vereinfachte Gleichung für die Bildweite eines leuchtenden Punktes, wenn die von ihm ausgehenden Strahlen durch eine Sammel- oder Zerstreuungs-Linse gebrochen werden, erinnert und die Construction einer jeden Niveaufläche, wenn dem α der entsprechende ihr zukommende numerische Werth ertheilt wird, leicht macht.

Aus der Gleichung 1, erkennt man noch leicht, dass, wenn die Massen Q_1 und Q_2 desselben Vorzeichens sind, und also hinsichtlich des Vorzeichens übereinstimmen mit α, die Niveauflächen so lange aus zwei getrennten, geschlossenen Flächentheilen, die die Punkte A_1 und A_2 umschliessen, bestehen, als dem absoluten Werthe nach $\alpha > 2 . \frac{Q}{a}$ ist; ist $\alpha = 2 \frac{Q}{a}$, so stossen beide Flächenstücke in einem Punkte zusammen, der auf der Mitte der Strecke $A_1 A_2$ liegt; ist

$\alpha < 2.\frac{Q}{a}$ so sind die zugehörigen Niveauflächen continuirlich zusammenhängende Flächen, die beide Punkte A_1 und A_2 zugleich umschliessen; ist dagegen das Vorzeichen Q_1 und Q_2 verschieden, so kann α alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen und jedem individuellen Werthe von α gehört als Niveaufläche eine Fläche zu, die allein denjenigen der beiden Punkte A_1 oder A_2 umschliesst, dessen Masse Q_1 oder Q_2 mit α gleiches Vorzeichen hat; ist α gleich Null, so ist die Niveaufläche eine Ebene, die durch die Mitte der Strecke $A_1 A_2$ senkrecht zu derselben geht und zugleich eine Kugelfläche von unendlich grossem Radius, deren Centrum ebenfalls im Halbirungspunkte der Strecke $A_1 A_2$ liegt. Für uns sind natürlich nur diejenigen Werthe von α wichtig, die Niveauflächen ergeben, welche im ersteren Falle in zwei getrennten geschlossenen Flächen bestehen, im letzteren Falle die Punkte A_1 und A_2 gesondert allseitig umschliessen. Für beide Fälle aber haben wir im Allgemeinen einen verschiedenen Werth von α anzunehmen, je nachdem der betrachtete Theil der Niveaufläche den Punkt A_1 oder den Punkt A_2 umschliesst; wir setzen daher das α des ersteren Theiles der Niveaufläche (Q_1 und Q_2 mit gleichem Vorzeichen) α_1, das des zweiten α_2, so dass der Punkt A_1 allein umschlossen werde von der Fläche, die die Gleichung

$$1^*, \qquad \alpha_1 = Q\left(\frac{1}{p} \pm \frac{1}{q}\right)$$

besitzt, der andere Punkt A_2 allein von der Fläche

$$1^{**}, \qquad \alpha_2 = Q\left(\frac{1}{p} \pm \frac{1}{q}\right).$$

Um die Kraftlinien kennen zu lernen brauchen wir offenbar nur die in einer bestimmten Meridianebene, etwa der xy Ebene unseres Coordinatensystemes gelegenen Kraftlinien zu bestimmen. Ist die Gleichung dieser Schaar von Kraftlinien $U = f(x, y)$, so bestimmen sich dieselben aus der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

wenn wir für V den oben gefundenen Ausdruck nehmen und darin $r = y$ setzen. Es entsteht

$$\left(\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}^3} \pm \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}^3}\right)\frac{\partial U}{\partial x}$$
$$+\left(\frac{y}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}^3} \pm \frac{y}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}^3}\right)\frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

Oder

$$\frac{(x-a)\,dy - y\,dx}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}^3} \pm \frac{(x+a)\,dy - y\,dx}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}^3} = 0,$$

wenn wir nach geschehener Integration dieser Differentialgleichung die willkürliche Integrationsconstante gleich U setzen.

Multipliciren wir die vorige Differentialgleichung mit y, so stellt jeder der beiden Theile ihrer linken Seite ein vollständiges Differential dar, oder y ist ein integrirender Factor dieser Differentialgleichung. Durch Integration findet man demnach als die gesuchte Gleichung der in der xy Ebene enthaltenen Schaar von Kraftlinien:

$$2, \quad U = \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} \pm \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}.$$

Bedeuten u und v die Winkel, welche die von A_1 und A_2 aus gezogenen Fahrstrahlen $\sqrt{(x-a)^2+y^2} = p_1$ und $\sqrt{(x+a)^2+y^2} = q_1$ mit der geometrischen Axe bilden, so ist auch die Gleichung der Schaar der Kraftlinien einfach

$$3, \quad U = \cos u \pm \cos v.$$

Der Werth von U kann demnach nur das Intervall von -2 bis $+2$ durchlaufen.

Die Gleichung 3, lässt eine einfache Construction der Kraftlinien erkennen vermittels zweier Kreise, die mit einem Radius gleich 1 um die Punkte A_1 und A_2 als Mittelpunkte beschrieben sind und einfach die Werthe von $\cos u$ und $\cos v$ als lineare Strecken ergeben.

Durch rational machen der Gleichung 2, entsteht für beide unterschiedenen Fälle:

$$(x-a)^4 q_1^4 + (x+a)^4 p_1^4 + U^4 p_1^4 q_1^4 - 2(x^2-a^2)p_1^2 q_1^2$$
$$-2U^2(x-a)^2 p_1^2 q_1^4 - 2U^2(x+a)^2 p_1^4 q_1^2 = 0.$$

Oder da

$$(x-a)^4 q_1^{\,4} + (x+a)^4 p_1^{\,4} - 2(x^2-a^2) p_1^{\,2} q^2$$
$$= [(x-a)^2 q_1^{\,2} - (x+a)^2 p_1^{\,2}]^2 = 16 a^2 x^2 y^4,$$
$$16 a^2 x^2 y^4 + U^2 p_1^{\,2} q_1^{\,2} [U^2 p_1^{\,2} q_1^{\,2} - 2(x-a)^2 q_1^{\,2} - 2(x+a)^2 p_1^{\,2}] = 0.$$

Sowohl wenn $x = a$, also $p_1^{\,2} = y^2$, als auch wenn $x = -a$, also $q_1^{\,2} = y^2$, genügt vorstehender Gleichung $y = 0$, sämmtliche Kraftlinien gehen demnach durch die beiden Punkte A_1 und A_2.

Setzt man in der Gleichung 2, $x = a + \varepsilon$ und lässt ε und y unendlich klein werden, so geht diese Gleichung über in

$$1 \pm \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + y^2}} = U$$
$$-\varepsilon^2 U(2-U) + y^2 (U-1)^2 = 0$$

also

$$y = \pm \frac{\sqrt{U(2-U)}}{U-1} \cdot \varepsilon.$$

In der Nähe des Punktes A_1 nähern sich demnach die Kraftlinien zwei Geraden, die einen endlichen Winkel mit einander einschliessen. Ganz dasselbe findet natürlich auch in der Nähe des Punktes A_2 statt.

Um die Vertheilung der Elektricität auf zwei Leiteroberflächen von der durch die Gleichungen 1* und 1** bestimmten Form zu erhalten, ermitteln wir zunächst den Werth von $\frac{\partial V}{\partial n}$ aus der Gleichung 1. Wir erhalten:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + 4 r^2 \left(\frac{\partial V}{\partial r^2}\right)^2$$

$$= Q^2 \left\{ \frac{1}{[(x-a)^2 + r^2]^2} + \frac{1}{[(x+a)^2 + r^2]^2} \pm 2 \frac{x^2 - a^2 + r^2}{\sqrt{(x-a)^2 + r^2}^3 \sqrt{(x+a)^2 + r^2}^3} \right\}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 = Q^2 \left[\frac{1}{p^4} + \frac{1}{q^4} \pm \frac{p^2 + q^2 - 4a^2}{p^3 q^3} \right] =$$

$$= Q^2 \left[\left(\frac{\pm p + q}{p \cdot q}\right)^4 \mp 3 \left(\frac{\pm p + q}{pq}\right)^2 \frac{1}{pq} \mp \frac{4a^2}{p^3 q^3} \right].$$

Setzen wir hier den Werth $\frac{\alpha}{Q}$ für $\frac{\pm p + q}{pq}$ nach Gleichung 1, ein, so kommt:

$$4, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 = Q^2 \left[\left(\frac{\alpha}{Q}\right)^4 \mp \left(\frac{\alpha}{Q}\right)^2 \frac{1}{p \cdot q} \mp \frac{4a^2}{p^3 q^3} \right]$$

der Werth von $\frac{\partial V}{\partial n}$ ändert sich also allein mit dem Produkte der beiden Fahrstrahlen p und q.

Nimmt man nun zur Gleichung 4, noch die beiden

$$\varrho_1 = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{\alpha=\alpha_1} ; \ \varrho_2 = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{\alpha=\alpha_2}$$

und die Gleichungen 1*, und 1**, so ergiebt sich die Dichtheit der Elektricität, mit denen die Leiteroberflächen zu versehen sind.

Das Vorzeichen, welches man dem Ausdrucke $\frac{\partial V}{\partial n}$ zu geben hat, richtet sich natürlich darnach, ob V nach aussen hin wächst oder abnimmt.

Wir nehmen als zweites Beispiel eine Anzahl, etwa n Hohlkugeln aus leitender Substanz, die einander isolirt umschliessen und deren sämmtliche begrenzende Flächen concentrisch angeordnet seien.

Der innersten Hohlkugel sei von Anfang an die Elektricitätsmenge Q_1, der nächsten die ebengenannte umschliessenden die Elektricitätsmenge Q_2, u. s. f. mitgetheilt, so dass die äusserste Kugelschale die Elektricitätsmenge Q_n ursprünglich erhielt. Es ist nun zu bestimmen, wie sich nach Eintritt der vorausgesetzten Zusammenstellung der Hohlkugeln die Elektricität über die einzelnen Hohlkugeln vertheilt.

Da sich auf einer Kugelfläche, wenn dieselbe isolirt ist, die Elektricität mit gleichförmiger Dichtheit verbreitet und da ferner die Potentialfunction einer solchen Ladung der Kugel für Punkte ausserhalb der Kugel dieselbe ist als wäre die Gesammtmasse der auf der Kugelfläche befindlichen Elektricität in deren Mittelpunkte vereinigt, so übersieht man leicht, dass sämmtliche innere Begrenzungsflächen der von uns angenommenen Leiterflächen Niveauflächen der in ihrem Innern befindlichen elektrischen Massen sind, dass also auch diese Flächen die im vorigen Paragraphe vorausgesetzten Bedingungen erfüllen.

Die einzelnen Begrenzungsflächen der Hohlkugeln sind aber in folgender Weise mit Elektricität geladen:

Auf der innern Begrenzungsfläche der innersten Hohl-

kugel befindet sich gar keine Elektricität, auf der äussern Begrenzungsfläche derselben lagert die Elektricitätsmenge Q_1 in gleichförmiger Dichtheit, auf der innern Begrenzungsfläche der folgenden Hohlkugel befindet sich in gleichförmiger Dichtheit die Elektricitätsmenge $-Q_1$, auf der äussern $Q_1 + Q_2$; auf der innern Begrenzungsfläche der folgenden Hohlkugel $-Q_1 - Q_2$, auf der äusseren $Q_1 + Q_2 + Q_3$ u. s. f., so dass die n^{te} Hohlkugel auf ihrer innern Begrenzungsfläche die gleichförmig elektrische Ladung mit der Quantität $-(Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_{n-1})$, auf ihrer äussern Begrenzungsfläche die gleichförmig dichte elektrische Ladung mit der Quantität $Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n$ aufweist. —

§. 5.

Die durch gegebene elektrische Nichtleiter auf einem Leiter hervorgerufene Influenzelektricität.

Sind die influenzirenden elektrischen Massen gegeben, so ist es auch deren Potentialfunction, die mit V bezeichnet werden möge. Die auf dem Leiter hervorgerufene Influenzelektricität kann dann nach §. 6. Cap. II. immer so berechnet werden, dass man zunächst über den Leiter Elektricität so vertheilt, dass diese für sich allein, ohne Mitwirkung der gegebenen Elektricität auf den Nichtleitern, im Gleichgewicht ist und für Punkte im Innern des Leiters einen Werth der für diesen Raum constanten Potentialfunction besitzt, der so gross ist, als er sein muss, wenn auch die auf den Nichtleitern haftende Elektricität mitwirkt und alsdann noch neue Elektricitätsmengen über die Leiter so vertheilt, dass die Potentialfunction der letzteren und V zusammen für jeden Punkt im Innern des Leiters Null beträgt. Wir haben uns hier nur mit der letzteren Art der Vertheitheilung von Elektricität zu beschäftigen.

Es seien V_i und V_a die Potentialfunctionen der auf dem Leiter erregten Influenzelektricität und zwar beziehe sich V_a auf Punkte, die ausserhalb der geschlossenen Fläche liegen, auf der die Influenzelektricität erregt ist, V_i auf Punkte im Innern des von dieser Fläche umschlossenen Raumes.

Liegen die gegebenen influenzirenden elektrischen Massen

ausserhalb des Leiters, so gilt nun für alle Punkte des von der Leiteroberfläche umschlossenen Raumes

$$1, \quad V + V_i = 0;$$

liegen aber die gegebenen influenzirenden elektrischen Massen isolirt innerhalb einer Höhlung des Leiters, so gilt für alle Punkte, die ausserhalb oder auf der die Höhlung begrenzenden (inneren) Oberfläche des Leiters liegen

$$2, \quad V + V_a = 0.$$

Ist man nun im Stande, aus dem durch 1, gegebenen Werthe von V_i, V_a und im andern Falle aus dem durch 2, gegebenen Werthe von V_a, V_i abzuleiten, so liefert die Gleichung I, §. 6. Cap. I.

$$3, \quad \varrho = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V_a}{\partial n} - \frac{\partial V_i}{\partial n}\right)$$

ohne weiteres die gesuchte Dichtheit der Influenzelektricität. Ein Beispiel, die Influenzelektricität auf diese Weise zu berechnen bildet die Influenzelektricität auf einer Kugelfläche. Hat nämlich die Kugelfläche den Radius R und ist sie nach irgend einer Weise mit Elektricität überdeckt, deren Dichtheit wir mit ϱ bezeichnen, so ist ihre Potentialfunction auf den Punkt $r\theta_1\varphi_1$, wenn $r\theta_1\varphi_1$ die auf ein räumliches Polarcoordinatensystem, dessen Pol im Kugelmittelpunkte liegt, bezogenen Coordinaten des Punktes sind, auf den sich die Potentialfunction bezieht, in leicht verständlichen Zeichen:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\varrho R \sin\theta\, d\theta}{\sqrt{R^2 - 2Rr\cos\gamma + r^2}}.$$

Entwickelt man die Grösse $\sqrt{R^2 - 2Rr\cos\gamma + r^2}^{\,-1}$ je nachdem $r \gtrless R$ ist, also auch je nachdem der Punkt, auf den sich die Potentialfunction bezieht, ausserhalb oder innerhalb der Kugelfläche liegt, nach aufsteigenden Potenzen von $\frac{R}{r}$ oder von $\frac{r}{R}$, und führt nach dieser Entwickelung die verlangten Integrationen aus, so stellen die auf diese Weise erhaltenen beiden Entwickelungen der Potentialfunction gerade die Werthe von V_a und V_i dar, und es ist leicht ersichtlich, dass, wenn V_a die Form hat

$$4, \quad V_a = A_0\left(\frac{R}{r}\right) + A_1\left(\frac{R}{r}\right)^2 + A_2\left(\frac{R}{r}\right)^3 + \ldots = \sum_0^\infty{}^n A_n\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1},$$

dann V_i ist

$$5, \quad V_i = A_0 + A_1\left(\frac{r}{R}\right) + A_2\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \ldots = \sum_0^\infty{}^n A_n\left(\frac{r}{R}\right)^n.$$

Die Gleichungen 4, und 5, zeigen aber einfach, wie man aus der einen Form der Potentialfunction die andere ableiten kann, gleichgültig wie die elektrischen Massen auf der Kugelfläche vertheilt sind, die diese Potentialfunctionen erzeugen.

Um nun aber die Gleichung 3, zur Bestimmung der Influenzelektricität verwenden zu können, ist noch zu zeigen, dass die Potentialfunction von Massen, welche ausserhalb der Kugelfläche liegen, für Punkte, die innerhalb der Kugelfläche liegen, immer auf die Form von V_i in 5, gebracht werden könne, und gleicher Weise die Potentialfunction von Massen innerhalb der Kugelfläche auf Punkte ausserhalb der Kugelfläche immer auf die Form von V_a in 4.

Nehmen wir wiederum das obige räumliche Polarcoordinatensystem an, so ist, wenn dq das Element der gegebenen influenzirenden elektrischen Masse bezeichnet, dessen Radiusvector r_1 ist,

$$V = \int^{\bullet} \frac{dq}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\delta}}.$$

Liegt nun die influenzirende elektrische Masse ausserhalb der Kugelfläche und bezieht sich V auf einen Punkt innerhalb der Kugelfläche, so ist immer $r_1 > r_2$, folglich können wir in diesem Falle setzen

$$\frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\delta}} = \frac{1}{r_1} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r_2}{r_1}\cos\delta + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{r_1} \sum_0^\infty{}^n a_n \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n$$

und ist alsdann weiter

$$V = \int^{\bullet} \frac{1}{r_1} \sum_0^\infty{}^n a_n \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n dq = \sum_0^\infty{}^n \left(\frac{r_2}{R}\right)^n \cdot \int^{\bullet} \frac{1}{r_1} a_n \left(\frac{R}{r_1}\right)^n dq,$$

so hat, wenn noch

$$\frac{1}{R}\int^{\bullet} a_n \left(\frac{R}{r_1}\right)^{n+1} dq = A_n',$$

V die Form

$$6, \quad V = \sum_0^\infty {}^n A_n' \left(\frac{r_2}{R}\right)^n,$$

also die von V_i in 5,.

Liegt dagegen die influenzirende elektrische Masse innerhalb einer sphärischen Höhlung des Leiters und bezieht sich V auf einen Punkt ausserhalb der Kugelfläche, so ist immer $r_1 < r_2$ und wir können in diesem Falle setzen:

$$\frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\delta}} = \frac{1}{r_2}\,\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r_1}{r_2}\cos\delta + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}} = \frac{1}{r_1}\sum_0^\infty {}^n a_n \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n.$$

Führt man jetzt die Rechnung weiter wie im vorigen Falle und setzt

$$A_n'' = \frac{1}{R}\int^{\bullet} a_n \left(\frac{r_1}{R}\right)^n dq,$$

so erhält man

$$7, \quad V = \sum_0^\infty {}^n A_n'' \left(\frac{R}{r_2}\right)^{n+1}$$

es hat also jetzt V die Form von V_a in 4,.

Mit Hülfe der Gleichungen 1, und 2, findet man nun aus 6, und 7, die Entwickelungen von V_i und V_a selbst, folglich daraus nach 4, und 5, auch resp. V_a und V_i und damit ist nach 3, die Dichtheit der Influenzelektricität bestimmt. Man erhält auf dem eben angegebenen Wege im ersten Falle

$$8, \quad \varrho = -\frac{1}{4R\pi}\left[\sum_0^\infty {}^n (2n+1)\, A_n'\right],$$

im zweiten Falle

$$9, \quad \varrho = -\frac{1}{4R\pi}\left[\sum_0^\infty {}^n (2n+1)\, A_n''\right].$$

Besonders bemerkenswerthe Resultate ergeben sich noch, wenn die influenzirende elektrische Masse Q ein blosser Massenpunkt P ist. Liegt nämlich P in der Entfernung R_1

ausserhalb des sphärischen Leiters, so entsteht für den jetzigen Fall

$$A_n' = Q \frac{1}{R} a_n \left(\frac{R}{R_1}\right)^{n+1}$$

$$V = \frac{Q}{R} \sum_0^{\infty} a_n \left(\frac{R}{R_1}\right)^{n+1} \left(\frac{r_2}{R}\right)^n$$

$$V_i = -\frac{Q}{R_1} \sum_0^{\infty} a_n \left(\frac{R}{R_1}\right)^n \left(\frac{r}{R}\right)^n;$$

$$V_a = -\frac{Q}{R_1} \sum_0^{\infty} a_n \left(\frac{R}{R_1}\right)^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}.$$

Führen wir in diesen letzteren Ausdruck eine neue lineare Grösse R_1' ein nach der Relation

$$R_1 . R_1' = R^2,$$

so entsteht

$$V_a = -Q \frac{R_1'}{R} \cdot \frac{1}{r} \sum_0^{\infty} a_n \left(\frac{R_1'}{r}\right)^n.$$

Hier ist aber

$$\frac{1}{r} \sum_0^{\infty} a_n \left(\frac{R_1'}{r}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rR_1' \cos\delta + R_1'^2}}$$

nichts anderes als die Entwickelung der reciproken Entfernung eines Punktes P', der in der Entfernung R_1' vom Kugelmittelpunkt auf der nach dem gegebenen Punkte P hin gerichteten Geraden gelegen ist (und selbst, weil $R_1 . R_1' = R^2$, innerhalb der sphärischen Begrenzungsfläche liegt) von dem Punkte, auf den sich die äussere Potentialfunction V_a bezieht. Nennen wir jene Entfernung r', so entsteht einfach

$$10, \quad V_a = -\frac{QR_1'}{R} \cdot \frac{1}{r'} = -Q\frac{R}{R_1} \cdot \frac{1}{r'}.$$

Ein ganz analoges Resultat entsteht, wenn der Punkt P innerhalb der Kugelfläche liegt, also $R_1 < R$ ist, im Bezug auf die innere Potentialfunction der Influenzelektricität, nämlich

$$11, \quad V_i = -Q. \frac{R_1'}{R} \cdot \frac{1}{r'} = -Q. \frac{R}{R_1} \frac{1}{r'}.$$

Wir fassen die in den Gleichungen 10, und 11, ausgesprochenen Gesetze zusammen, indem wir nach Thomson's[1]) Vorgange den elektrischen Massenpunkt P', welchen wir mit der elektrischen Masse $-Q. \frac{R_1'}{R}$ oder $-Q. \frac{R}{R_1}$ versehen denken und der auf der nach dem Punkte P vom Kugelmittelpunkt aus gezogenen Geraden liegt in einer Entfernung R_1' vom Kugelmittelpunkt, wo R_1' sich bestimmt aus der Gleichung $R_1 . R_1' = R^2$, das elektrische Bild des elektrischen Punktes P nennen.

Die von einem elektrischen Punkte auf einer leitenden und zur Erde abgeleiteten Kugelfläche hervorgerufene Influenzelektricität besitzt für den Raum, in welchem der influenzirende elektrische Punkt liegt, dieselbe Potentialfunction, wie das elektrische Bild des gegebenen Massenpunktes.

Zugleich ist nach früheren Sätzen leicht ersichtlich, dass, wenn der influenzirende Massenpunkt ausserhalb der Kugel liegt, die Gesammtmenge der Influenzelektricität gleich ist der Masse des elektrischen Bildes; wenn er aber innerhalb der Kugel liegt, gleich der des influenzirenden elektrischen Punktes.

§. 6.

Die Vertheilung der Elektricität auf zwei benachbarten, leitenden Kugeln.

Das Problem, welches wir jetzt zu behandeln im Begriffe stehen, ist bis jetzt das einzige gewesen, dessen Lösung vollständig gelungen ist auch für die Influenzelektricität, die die elektrischen Ladungen beider Kugeln auf einander hervorrufen. Aus diesem Grunde werden wir die wichtigsten drei verschiedenen Lösungen des Problemes, welche im Laufe der Zeit gegeben worden sind, sämmtlich berücksichtigen, um durch eine Vergleichung der Methoden Gelegenheit zu geben, über den naturgemässesten Weg zur Lösung auch noch anderer Probleme wenigstens Vermuthungen sich bilden zu können.

---

1) Cambridge and Dublin Mathematical Journal Feb. 1850. vol. V. p. 9.

Es bedeute a den Radius der einen Kugel A, b den Radius der andern Kugel B; c sei der Abstand ihrer Mittelpunkte und wir nehmen, wenn nicht das Gegentheil besonders vorausgesetzt wird, immer an, dass $c > a + b$ sei, die Kugeln also ganz ausserhalb einander liegen und sich nicht berühren. Q_1 sei die der Kugel A direct mitgetheilte Elektricitätsmenge, Q_2 die der Kugel B direct mitgetheilte. Nach Eintritt des elektrischen Gleichgewichtes besitze die Potentialfunction aller vorhandenen Elektricität für alle Punkte auf und innerhalb der Kugel A den Werth α_1, für alle Punkte auf und innerhalb der Kugel B den Werth α_2. Nehmen wir weiter in jeder der beiden Kugeln gewöhnliche räumliche Polarcoordinatensysteme an, deren Pole in die Centren der beiden Kugeln fallen und seien die Coordinaten eines Raumpunktes bezogen auf das der Kugel A zugehörige Coordinatensystem r_1, θ_1, φ_1, bezogen auf das der Kugel B angehörige, r_2, θ_2, φ_2, wo nun r_1 und r_2 die Radien vectoren, θ_1 und θ_2 die Breiten, φ_1 und φ_2 die Längen des zu fixirenden Raumpunktes sind. Die Polaraxe beider Coordinatensysteme möge in die Centrale beider Kugeln fallen und immer nach dem Mittelpunkte der andern Kugel hingerichtet sein. Dann können die Längen φ_1 und φ_2 von derselben festen Ebene an gezählt werden und es ist zweckmässig, die Breiten so zu zählen, dass für jedes Coordinatensystem der Mittelpunkt der andern Kugel die Breite Null besitzt. Dadurch hängen die sechs Coordinaten $r_1, \theta_1, \varphi_1, r_2, \theta_2, \varphi_2$ durch folgende drei Gleichungen von einander ab:

$$1, \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2 \\ r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2 &= c \\ r_1 \sin \theta_1 &= r_2 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

Poisson, der zuerst das vorgelegte Problem löste (Mém. de l'Inst. année 1811), ging von der damals noch ungerechtfertigten Voraussetzung aus, dass sich die Dichtheiten der auf beiden Kugeln befindlichen Elektricitäten in nach Kugelfunctionen angeordneten Reihen darstellen lassen[1]), dass

[1]) Die Beweise dafür, dass jede Function zweier Variablen sich nach Kugelfunctionen entwickeln lasse, wurden erst später von Dirichlet im 17. Bande von Crelle's Journal und von Bonnet im 17. Bande des Liouville'schen Journales gegeben.

man also setzen könne, für die Kugel A ist die elektrische Dichtheit

$$y = A_0 P_0 + A_1 P_1 + A_2 P_2 + \dots$$

und für die Kugel B

$$z = B_0 P_0 + B_1 P_1 + B_2 P_2 + \dots,$$

in welchen beiden Entwickelungen nun die A und B zu bestimmende constante Coëfficienten sind, während die Kugelfunctionen P die bekannten Entwickelungsfunctionen der reciproken Entfernung zweier Punkte

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2 - 2rx\,[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')]}}$$

nach auf- oder absteigenden Potenzen von x, jenachdem $x < r$ oder $x > r$ ist. Schreiben wir jene Entwickelung in der Form

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} U_0 + \frac{x}{r^2} U_1 + \frac{x^2}{r^3} U_2 + \frac{x^3}{r^4} U_3 + \dots,$$

so besteht bekanntlich die wichtige Gleichung:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_m U_n \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{wenn } m \gtrless n \\ \dfrac{4\pi}{2n+1} P_m & \;\;,,\;\; m = n, \end{cases}$$

vorausgesetzt, dass man in dem Werthe von P_m unter dem Doppelintegrale θ_1 und φ_1 oder θ_2 und φ_2 ersetzt durch θ und φ und in dem Werthe von P_m ausserhalb des Integrales θ_1 und φ_1, oder θ_2 und φ_2 ersetzt durch θ' und φ'.

Wendet man diese Gleichung an, um den Ausdruck für die Potentialfunction der auf den Kugeln haftenden Elektricitäten auf einen Punkt des Raumes zu erlangen, und setzt man zur Abkürzung

$$\varphi(\cos\theta_1', x_1) = A_0 P_0 + \frac{x_1}{3} A_1 P_1 + \frac{x_1^2}{5} A_2 P_2 + \dots,$$

so entsteht für die Potentialfunction der auf der Kugel A befindlichen Elektricität

1) wenn der Punkt x_1, θ_1', φ_1' ausserhalb der Kugel liegt, also $x > a$ ist

$$V_e = 4\pi \frac{a^2}{x_1} \varphi\left(\cos\theta_1', \frac{a}{x_1}\right),$$

2) wenn der Punkt x_1, ϑ_1', φ_1' innerhalb dieser Kugel liegt, also $x < a$ ist

$$V_i = 4\pi a \varphi \left(\cos \vartheta_1', \frac{x_1}{a}\right),$$

3) wenn der Punkt x_1, ϑ_1', φ_1 auf der Kugel A selbst liegt, also $x_1 = a$ ist

$$V_{x=a} = 4\pi a \varphi (\cos \vartheta_1', 1).$$

Analog erhält man für die Kugel B, wenn zur Abkürzung

$$\Phi (\cos \vartheta_2', x_2) = B_0 P_0 + \frac{x_2}{3} B_1 P_1 + \frac{x_2^2}{5} B_2 P_2 + \ldots,$$

gesetzt wird, der Reihe nach die entsprechenden Ausdrücke

$$4\pi \frac{b^2}{x_2} \Phi \left(\cos \vartheta_2', \frac{b}{x_2}\right);\ 4\pi b \Phi \left(\cos \vartheta_2', \frac{x_2}{b}\right);\ 4\pi b \Phi \left(\cos \vartheta_2', 1\right)$$

Nach I, §. 3. Cap. II. befinden sich nun die angenommenen elektrischen Ladungen y und z auf den beiden Kugeln im Gleichgewicht, wenn die Gleichungen bestehen

$$2, \quad \begin{aligned} \frac{a^2}{x_1} \varphi \left(\cos \vartheta_1', \frac{a}{x_1}\right) + b \Phi \left(\cos \vartheta_2', \frac{x_2}{b}\right) &= \alpha_2. \\ a \varphi \left(\cos \vartheta_1', \frac{x_1}{a}\right) + \frac{b^2}{x_2} \Phi \left(\cos \vartheta_2', \frac{b}{x_2}\right) &= \alpha_1, \end{aligned}$$

von denen die erste für alle Punkte auf und innerhalb der Kugel A, die zweite für alle Punkte auf und innerhalb der Kugel B zu gelten hat, und die Coordinaten x_1 x_2, ϑ_1', ϑ_2' nach den Gleichungen 1, an einander gebunden sind durch die Relationen

$$c = x_1 \cos \vartheta_1' + x_2 \cos \vartheta_2';\ x_1 \sin \vartheta_1' = x_2 \sin \vartheta_2'.$$

Benützt man die Gleichungen 2, unter der vor der Hand gemachten Voraussetzung $\vartheta_1' = \vartheta_2' = 0$ und setzt dazu

$$\varphi \left(1, \frac{x_1}{a}\right) = f \left(\frac{x_1}{a}\right);\ \Phi \left(1, \frac{x_2}{b}\right) = F \left(\frac{x_2}{b}\right)$$

so ergeben jene Gleichungen zugleich mit Hülfe der jetzt gültigen Relation

$$x_1 + x_2 = c,$$

$$2^*, \quad \frac{a^2}{c-x_2} f\left(\frac{a}{c-x_2}\right) + bF\left(\frac{x_2}{b}\right) = \alpha_2;$$

$$af\left(\frac{x_1}{a}\right) + \frac{b^2}{c-x_1} F\left(\frac{b}{c-x_1}\right) = \alpha_1,$$

die erste dieser beiden letzten Gleichungen muss erfüllt sein für alle Werthe von x_2, die zwischen $-b$ und $+b$ liegen, die letztere für alle Werthe von x_1, die zwischen $-a$ und $+a$ liegen (die Grenzen mit eingeschlossen).

Gebraucht man in der ersten Gleichung die Substitution $\frac{b}{c-x'} = \frac{x_2}{b}$ also $x_2 = \frac{b^2}{c-x'}$, so erkennt man, dass, wenn x' alle möglichen Werthe zwischen $-a$ und $+a$ annimmt, x_2 in seinen Werthen zwischen noch engeren Grenzen als $-b$ und $+b$ schwankt, wir können daher auch in der ersten der vorigen Gleichungen die Substitution gebrauchen $\frac{b}{c-x_1} = \frac{x_2}{b}$ oder $x_2 = \frac{b^2}{c-x_1}$ und erhalten dann statt ihrer:

$$\frac{a^2(c-x_1)}{c^2-cx_1-b^2} f\left(\frac{ac-ax_1}{c^2-b^2-cx_1}\right) + bF\left(\frac{b}{c-x_1}\right) = \alpha_2$$

Eliminirt man aus dieser und der letzten der vorigen beiden Gleichungen $F\left(\frac{b}{c-x_1}\right)$, so entsteht

$$3, \quad af\left(\frac{x_1}{a}\right) - \frac{a^2 b}{c^2-b^2-cx_1} f\left(\frac{ac-ax_1}{c^2-b^2-cx_1}\right) = \alpha_1 - \alpha_2 \frac{b}{c-x_1},$$

setzt man in dieser Gleichung ax an die Stelle von x_1 und macht

$$\frac{c^2-b^2}{a} = k$$

so entsteht:

$$4, \quad f(x) - \frac{b}{k-cx} f\left(\frac{c-ax}{k-cx}\right) = \frac{\alpha_1}{a} - \frac{\alpha_2 b}{ac-a^2x}$$

Diese Functionalgleichung integriren wir nach und nach, indem wir zunächst ihre rechte Seite verschwinden lassen und zusehen, unter welcher Bedingung die Substitution

$$f(x) = \frac{f'(x)}{1+mx}$$

auch die linke Seite zum Verschwinden bringt.

Nach dieser Substitution ist aber

$$f\left(\frac{c-ax}{k-cx}\right)=\frac{k-cx}{k+mc-(c+am)x}f'\left(\frac{c-ax}{k-cx}\right);$$

macht man nun

$$(k+mc)\,m=-c-am,$$

oder, was dasselbe ist, bedeutet m eine der beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$5, \quad cm^2+(k+a)\,m+c=0,$$

so verschwindet die linke Seite der Gleichung 4, unter der Bedingung, dass

$$f'(x)=\frac{b}{k+mc}f'\left(\frac{c-ax}{k-cx}\right),$$

d. h. $f'(x)$ muss eine solche Function von x sein, dass sie mit einer gewissen constanten Grösse multiplicirt ihren Werth nicht ändert, wenn man noch statt x $\frac{c-ax}{k-cx}$ substituirt.

Eine solche Function ist aber irgend eine Potenz von

$$\frac{1+m_1x}{1+m_2x},$$

wenn unter m_1 und m_2 die beiden Wurzeln der Gleichung 5, verstanden werden, denn jener Ausdruck wird in Folge der genannten Substitution

$$\frac{k+m_1c}{k+m_2c}\cdot\frac{1+m_1x}{1+m_2x}.$$

Setzen wir daher

$$f'(x)=\left(\frac{1+m_1x}{1+m_2x}\right)^n, \text{ folglich } f'\left(\frac{c-ax}{k-cx}\right)=\left(\frac{k+m_1c}{k+m_2c}\right)^n f'(x),$$

so ergiebt die vorige Bedingungsgleichung zur Bestimmung von n die Bedingung

$$1=\frac{b}{k+m_1c}\left(\frac{k+m_1c}{k+m_2c}\right)^n$$

Nach der Gleichung 5, finden nun die Relationen statt:

$$m_1m_2=1;\quad m_1+m_2=-\frac{k+a}{c},$$

folglich ist auch

$$(k + m_1 c)(k + m_2 c) = c^2 - a k = b^2$$

und demnach wird die vorige Bedingungsgleichung:

$$1 = \frac{b}{b^{2n}} \frac{(k + m_1 c)^{2n}}{k + m_1 c},$$

der man durch die Annahme $n = \frac{1}{2}$ genügen kann, so dass

$$f'(x) = \sqrt{\frac{1 + m_1 x}{1 + m_2 x}};\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1 + m_1 x)(1 + m_2 x)}},$$

oder auch

$$f(x) = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c - (k + a) x + c x^2}}$$

wird.

Bezeichnet nun P eine Function, die sich nicht ändert, wenn ihr Argument x in $\frac{c - a x}{k - c x}$ übergeht, so wird die vereinfachte Gleichung 4, integrirt durch das allgemeine Integral

$$f(x) = \frac{P}{\sqrt{c - (k + a) x + c x^2}}.$$

Nehmen wir jetzt aus der Gleichung 4, die zu integrirende Gleichung

$$6, \quad f(x) - \frac{b}{k - c x} f\left(\frac{c - a x}{k - c x}\right) = \frac{\alpha_1}{a},$$

und suchen ihr durch die nach Potenzen von b fortschreitende Reihe zu genügen:

$$f(x) = \frac{\alpha_1}{a} \{\psi_0(x) + b\,\psi_1(x) + b^2\,\psi_2(x) + \ldots\},$$

so folgt zunächst, weil für $b = 0$ $f(x) = \frac{\alpha_1}{a}$ wird, dass

$$\psi_0(x) = 1$$

und

$$\psi_{n+1}(x) = \frac{1}{k - c x} \psi_n\left(\frac{c - a x}{k - c x}\right);$$

suchen wir dieser letzteren Bedingung zu genügen durch die Annahme

$$\psi_n(x) = \frac{1}{A_n + B_n x},$$

wo A_n und B_n unabhängig von x sein sollen, so müssen diese Werthe den Bedingungen genügen:

$$A_n k + B_n c = A_{n+1};\ A_n c + B_n a = -B_{n+1},$$

aus denen durch Elimination von B_n und B_{n+1} mit Beachtung der Beziehung $b^2 = c^2 - ka$ folgt:

$$A_{n+2} k + (a-k) A_{n+1} + b^2 A_n = 0.$$

Diese Differenzengleichung 2. Ordnung wird integrirt durch

$$A_n = p\,\alpha'^n + q\,\alpha''^n,$$

wo α' und α'' die Wurzeln der Gleichung

$$6, \qquad \alpha^2 + (a-k)\,\alpha + b^2 = 0$$

und p und q die Integrationsconstanten sind.

Aus der Gleichung $A_n k + B_n c = A_{n+1}$ folgt weiter

$$B_n = p\,\frac{\alpha' - k}{c}\,\alpha'^n + q\,\frac{\alpha'' - k}{c}\,\alpha''^n,$$

folglich ergiebt sich

$$\psi_n(x) = \frac{c}{p\,(c + \alpha' x - kx)\,\alpha'^n + q\,(c + \alpha'' x - kx)\,\alpha''^n}$$

und zur Bestimmung der Constanten p und q wissen wir, dass

$$\psi_0(x) = \frac{c}{(p+q)\,c + [p\,(\alpha' - k) + q\,(\alpha'' - k)]\,x} = 1,$$

folglich ist

$$p + q = 1;\ p\,(\alpha' - k) + q\,(\alpha'' - k) = 0$$

und demnach

$$p = \frac{k - \alpha''}{\alpha' - \alpha''};\ q = \frac{k - \alpha'}{\alpha'' - \alpha'}$$

Hiermit wird nun, da noch nach 6,

$$\alpha' + \alpha'' = k - a;\ \alpha'\alpha'' = b^2;\ (\alpha' - k)\,(\alpha'' - k) = b^2 + ka = c^2$$

$$\psi_n(x) = \frac{\alpha' - \alpha''}{(\alpha' + a - cx)\,\alpha'^n - (\alpha'' + a - cx)\,\alpha''^n}$$

und

$$f(x) = \frac{\alpha_1\,(\alpha' - \alpha'')}{a} \sum_0^x{}^n \frac{b^n}{(\alpha' + a - cx)\,\alpha'^n - (\alpha'' + a - cx)\,\alpha''^n}.$$

Geht man weiter, anstatt von der Gleichung 4, von der Gleichung

$$f(x) - \frac{b}{k - cx} f\left(\frac{c - ax}{k - cx}\right) = - \frac{\alpha_2 b}{ac - a^2 x}$$

aus, so kann man genau denselben Weg zur Integration einschlagen, wie der eben befolgte war, indem das einzig abweichende ist, dass man in der ursprünglichen Annahme der unendlichen nach aufsteigenden Potenzen von b fortlaufenden Reihe für $f(x)$ statt des gemeinschaftlichen Factors $\frac{\alpha_1}{a}$, jetzt $\frac{\alpha_2 b}{a}$ schreibt und zur Bestimmung der früheren Integrationsconstanten p und q jetzt die Bedingung hat, dass in dem durch $\frac{\alpha_2 b}{a}$ dividirten Werthe von $f(x)$ das von b freie Glied $\frac{1}{c - ax}$ betragen muss, wodurch für die jetzigen Integrationsconstanten p' und q' entsteht:

$$p' + q' = c;\ p'(\alpha' - k) + q'(\alpha'' - k) = - ac$$

folglich

$$p' = \frac{c\alpha'}{\alpha' - \alpha''};\ q' = \frac{c\alpha''}{\alpha'' - \alpha'}$$

ist, so dass erhalten wird

$$f(x) = - \frac{\alpha_2}{a}(\alpha' - \alpha'')$$

$$\sum_0^\infty {}^n \frac{b^{n+1}}{[c - (\alpha'' + a)x]\,\alpha'^{n+1} - [c - (\alpha' + a)x]\,\alpha''^{n+1}}.$$

Durch Addition sämmtlicher drei erlangten Integrationsergebnisse stellt sich endlich als vollständiges Integral der Gleichung 4, heraus:

$$f(x) = \frac{P}{\sqrt{c - (k + a)x + cx^2}}$$

$$+ \frac{\alpha_1(\alpha' - \alpha'')}{a} \sum_0^\infty {}^n \frac{b^n}{(\alpha' + a - cx)\,\alpha'^n - (\alpha'' + a - cx)\alpha''^n}$$

$$- \frac{\alpha_2(\alpha' - \alpha'')}{a} \sum_0^\infty {}^n \frac{b^{n+1}}{[c - (\alpha'' + a)x]\alpha'^{n+1} - [c - (\alpha' + a)x]\,\alpha''^{n+1}}$$

Es genügt nun die Function $f(x)$ allen an sie zu stellenden Forderungen, wenn man $P = 0$ setzt[1]), so dass man hat

$$7, \quad f(x) = \frac{\alpha_1(\alpha' - \alpha'')}{a} \sum_0^{\infty} {}^n \frac{b^n}{(\alpha' + a - cx)\alpha'^n - (\alpha'' + a - cx)\alpha''^n}$$

$$- \frac{\alpha_2(\alpha' - \alpha'')}{a} \sum_0^{\infty} {}^n \frac{b^{n+1}}{[c - (\alpha'' + a)x]\alpha'^{n+1} - [c - (\alpha' + a)x]\alpha''^{n+1}}$$

wo nun x (weil oben $x_1 = a x$ gesetzt wurde) jeden beliebigen Werth zwischen -1 und $+1$ haben kann.

Um die Function $F(x)$ zu bekommen, setzen wir in der ersten der Gleichungen 2*, wie es erlaubt ist

$$x_2 = b x$$

und erhalten

$$F(x) = \frac{\alpha_2}{b} - \frac{a^2}{bc - b^2 x} f\left(\frac{a}{c - bx}\right),$$

folglich mit Hülfe von 7,

$$F(x) = \frac{\alpha_2}{b} + \frac{\alpha_2 a(\alpha' - \alpha'')}{b}$$

$$\sum_0^{\infty} {}^n \frac{b^{n+1}}{(c^2 - a^2 - a\alpha'' - bcx)\alpha'^{n+1} - (c^2 - a^2 - a\alpha' - bcx)\alpha''^{n+1}}$$

$$- \frac{\alpha_1 a(\alpha' - \alpha'')}{b} \sum_0^{\infty} {}^n \frac{b^n}{[c\alpha' - (\alpha' + a)bx]\alpha'^n - [c\alpha'' - (\alpha'' + a)bx]\alpha''^n}.$$

Bildet man in der ersten Summe der rechten Seite dieser Gleichung auch das Glied für $n = -1$, so ist dasselbe $\frac{\alpha_2}{b}$, wir können daher die ersten beiden Ausdrücke der rechten Seite in einen einzigen zusammenfassen, wenn wir die erste Summe von $n = -1$ bis $n = \infty$ nehmen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn wir hinter dem ersten Summenzeichen $\sum_0^{\infty} {}^n$ n statt $n + 1$ schreiben. Wen-

[1]) Für den Fall, dass sich beide Kugeln berühren, könnte man setzen $c = 1 + b$; $a = 1$; also $\sqrt{c - (k + a)x + cx^2} = \sqrt{(1 + b)(1 - x)^2}$, folglich würde für $x = 1$ $f(x)$ unendlich werden, wenn P nicht gleich Null wäre, da die andern Glieder von $f(x)$ unter den gemachten Voraussetzungen endlich bleiben.

den wir ferner auf die Nenner der zu summirenden Glieder in der ersten Summe die Relation $c^2 - a^2 - b^2 = a(\alpha' + \alpha'')$, in der zweiten Summe die Relation $b^2 = \alpha'\alpha''$ an, so erhalten wir:

$$8, \quad F(x) = \frac{\alpha_2 a}{b}(\alpha' - \alpha'')$$

$$\sum_0^\infty{}^n \frac{b^n}{(b^2 + a\alpha' - bcx)\alpha'^n - (b^2 + a\alpha'' - bcx)\alpha''^n}$$

$$- \frac{\alpha_1 a}{b}(\alpha' - \alpha'')$$

$$\sum_0^\infty{}^n \frac{b^{n+1}}{[bc - (b^2 + a\alpha'')x]\alpha'^{n+1} - [bc - (b^2 + a\alpha')x]\alpha''^{n+1}}.$$

Nach der oben gegebenen Bedeutung von $f(x)$ und $F(x)$ haben wir nun diese Functionen in Reihen zu entwickeln, die nach aufsteigenden Potenzen von x verlaufen, es besteht also $f(x)$ und $F(x)$ aus einem Aggregat von Gliedern von der Form

$$\frac{1}{p - qx} = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{q}{p}x + \frac{q^2}{p^2}x^2 + \frac{q^3}{p^3}x^3 + \cdots\right)$$

Ist nun

$$(1 - 2\cos\theta\, x + x^2)^{-\frac{1}{2}} = P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + P_3 x^3 + \cdots$$

so gehen die für $f(x)$ gültigen Aggregate in die für $\varphi(\cos\theta, x)$ gültigen über, wenn wir schreiben

$$(p^2 - 2pq\cos\theta + q^2x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{p}\left(P_0 + P_1\frac{q}{p}x + P_2\frac{q^2}{p^2}x^2 + P_3\frac{q^3}{p^3}x^3 + \cdots\right)$$

Analoges gilt für die Functionen $F(x)$ und $\Phi(\cos\theta, x)$. Daher erhalten wir schliesslich für die gesuchten Functionen:

$$\varphi(\cos\theta, x) = \frac{\alpha_1(\alpha' - \alpha'')}{a}$$

$$\sum_0^\infty{}^n \frac{b^n}{\sqrt{A_n^2 - 2A_n(\alpha'^n - \alpha''^n)c\cos\theta x + (\alpha'^n - \alpha''^n)^2c^2x^2}}$$

$$9, \qquad - \frac{\alpha_2(\alpha' - \alpha'')}{a}$$

$$\sum_0^\infty{}^n \frac{b^{n+1}}{\sqrt{(\alpha'^{n+1} - \alpha''^{n+1})^2c^2 - 2(\alpha'^{n+1} - \alpha''^{n+1})A_n' c\cos\theta x + A_n'^2x^2}},$$

wenn
$$(\alpha' + a)\alpha'^n - (\alpha'' + a)\alpha''^n = A_n$$
$$(\alpha'' + a)\alpha'^{n+1} - (\alpha' + a)\alpha''^{n+1} = A_n'$$

$$\Phi(\cos\vartheta, x) = \frac{\alpha_2 a(\alpha' - \alpha'')}{b} \sum_0^r \frac{b^n}{\sqrt{B_n^2 - 2B_n(\alpha'^n - \alpha''^n)bc\cos\theta x + (\alpha'^n - \alpha''^n)^2 b^2 c^2 x^2}}$$

10,
$$- \frac{\alpha_1 a(\alpha' - \alpha'')}{b} \sum_0^r \frac{b^{n+1}}{\sqrt{(\alpha'^{n+1} - \alpha''^{n+1})^2 b^2 c^2 - 2(\alpha'^{n+1} - \alpha''^{n+1})B_n' bc\cos\theta x + B_n'^2 x^2}}$$

wenn
$$(b^2 + a\alpha')\alpha'^n - (b^2 + a\alpha'')\alpha''^n = B_n$$
$$(b^2 + a\alpha'')\alpha'^{n+1} - (b^2 + a\alpha')\alpha''^{n+1} = B_n'.$$

Vergleicht man ferner mit einander die Functionen φ, Φ, f, F, y, und z, wie sie oben definirt wurden, so findet man leicht folgenden Zusammenhang bestätigt:

11,
$$y = \left[2x \frac{\partial \varphi(\cos\theta_1, x)}{\partial x} + \varphi(\cos\theta_1, x)\right]_{x=1}$$
$$z = \left[2x \frac{\partial \Phi(\cos\theta_2, x)}{\partial x} + \Phi(\cos\theta_2, x)\right]_{x=1}$$

und für die elektrische Dichtheit in den Punkten der Centrallinie selbst

$$y = \left[2x \frac{\partial f(x)}{\partial x} + f(x)\right]_{x=+1}$$ für den Punkt zwischen den Centren

$x=-1$ für den der Kugel B abgewendeten Punkt

$$z = \left[2x \frac{\partial F(x)}{\partial x} + F(x)\right]_{x=+1}$$ für den Punkt zwischen den Centren

$x=-1$ für den der Kugel A abgewendeten Punkt.

Hiermit verlassen wir die Lösung des vorgelegten Problems, wie sie Poisson gegeben hat und wenden uns zu der Lösung, die Riemann in seinen Vorlesungen über „das Potential" gab. Es fusst diese Lösung auf den Betrachtungen, die im zweiten Beispiele in §. 5. Cap. I. angestellt wurden. Setzen wir nämlich, wenn V die Gesammtpotentialfunction

aller vorhandenen Elektricität bedeutet, $V - \alpha_1 = U'$, und $V - \alpha_2 = U''$, so kann jetzt die Bestimmung von U' und U'' ganz so, wie an der eben genannten Stelle durchgeführt werden. Es sei daher

$$U_r' = -\frac{a}{r} U'_{\frac{a^2}{r}}\,;\quad U_s'' = -\frac{b}{s} U''_{\frac{b^2}{s}},$$

wenn r und s resp. die Abstände von den Mittelpunkten der beiden Kugeln A und B bezeichnen. Bestimmen wir nämlich V in dieser Weise, so genügt V allen den Bedingungen, denen V als Potentialfunction genügen muss und ersetzen wir endlich noch die nach der angenommenen Bestimmung von V im Innern der beiden Kugeln auftretenden Massenpunkte durch eine für alle Punkte des äussern Raumes äquivalente Massenvertheilung auf den beiden Kugelflächen selbst, was nach §. 11. Cap. I. leicht möglich ist, so genügt die so gewonnene Potentialfunction V auch den Bedingungen des elektrischen Gleichgewichtes auf beiden Kugelflächen.

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt nun für Punkte im Innern der Kugel A

$$V_r - \alpha_1 = -\frac{a}{r}\left(V_{\frac{a^2}{r}} - \alpha_1\right)$$

oder

$$12, \quad V_r = -\frac{a}{r} V_{\frac{a^2}{r}} + \left(\frac{a}{r} + 1\right)\alpha_1;$$

analog für Punkte im Innern der Kugel B

$$13, \quad V_s = -\frac{b}{s} V_{\frac{b^2}{s}} + \left(\frac{b}{s} + 1\right)\alpha_2.$$

Um nun vermittels dieser Gleichungen 12, und 13, die Werthe von V für alle Punkte des Raumes zu erhalten, unterwirft man V denselben Bedingungen, wie §. 5. Cap. I. mit U geschah, indem man Endlichkeit und Stetigkeit von V für alle Punkte ausserhalb der beiden gegebenen Kugeln verlangt.

Lässt man in den Gleichungen 12, und 13, r und s über alle Grenzen abnehmen, so wird $V_{\frac{a^2}{r}}$ und $V_{\frac{b^2}{s}}$ das V eines unendlich entfernten Punktes und nähert sich derartig der

Null, dass $\lim\limits_{r=0} \frac{a^2}{r} V_{\frac{a^2}{r}}$ sowohl wie $\lim\limits_{s=0} \frac{b^2}{s} V_{\frac{b^2}{s}}$ bestimmte endliche Werthe erlangt, folglich wird $\lim\limits_{r=\infty} V_r = \lim\limits_{r=0} \frac{a\alpha}{r}$ und $\lim\limits_{s=0} V_s = \lim\limits_{s=0} \frac{b\alpha_2}{s}$ unendlich.

Es wird also unsere Potentialfunction V in den Mittelpunkten der beiden gegebenen Kugeln nach der angegebenen Weise unendlich, folglich auch in deren Bildern, die auf der Centrallinie in der jedesmaligen andern Kugel in nach den Gleichungen 12, und 13, bestimmter Lage sich befinden; alsdann wieder in den Bildern dieser letzteren Bilder, die wiederum auf der Centrallinie in den ursprünglichen Kugeln liegen u. s. f. Es giebt also auf der Centrallinie beider Kugeln unendlich viele Punkte, die aber alle innerhalb beider Kugeln an bestimmten Stellen liegen, in welchen die Potentialfunction V in bestimmter Weise unendlich wird wie $\lim\limits_{t=0} \frac{k}{t}$, wenn k eine endliche Constante bedeutet.

Man überzeugt sich leicht, dass V in allen übrigen Punkten des Raumes endlich und stetig bleibt. Mithin haben wir V zu betrachten als Potentialfunction von Massen, die in der vorhin bestimmten Weise auf der Centrale beider Kugeln vertheilt sind und es hat daher V die Form

$$V = \sum_0^{\infty} {}_n \frac{m_n}{\sqrt{(x_n - x)^2 + y^2 + z^2}},$$

oder, wenn man V nur für Punkte in der zur X Axe genommenen Centrale haben will

$$14, \qquad V = \sum_0^{\infty} {}_n \frac{m_n}{\pm (x_n - x)},$$

wobei das Vorzeichen im Nenner so zu wählen ist, dass dieser immer positiv bleibt.

Um die Massen m_n und deren Lagen x_n zu bestimmen, könnte man ohne weiteres die elektrischen Bilder successive mittels der Gleichungen 12, und 13, berechnen. Riemann verfährt aber indirect, indem er $V = f(x)$ zunächst nur bestimmt für Punkte, die auf der Centrallinie liegen und

dazu aus den Gleichungen 12, und 13, leicht die Functionalgleichungen erhält

$$\text{I,}\quad \begin{aligned} f(x) &= -\frac{a}{x} f\left(\frac{a^2}{x}\right) + \left(\frac{a}{x} + 1\right)\alpha_1 \\ f(x) &= -\frac{b}{c-x} f\left(c - \frac{b^2}{c-x}\right) + \left(\frac{b}{c-x} + 1\right)\alpha_2. \end{aligned}$$

Aus denen durch Subtraction sich ergiebt

$$\text{II,}\quad \frac{a}{x} f\left(\frac{a^2}{x}\right) - \frac{b}{c-x} f\left(c - \frac{b^2}{c-x}\right) = \alpha_1 - \alpha_2 + \frac{a\alpha_1}{x} - \frac{b\alpha_2}{c-x}.$$

Statt der Gleichung II, nimmt nun Riemann die Gleichungen

$$15,\quad \frac{a}{x}\varphi\left(\frac{a^2}{x}\right) - \frac{b}{c-x}\varphi\left(c - \frac{b^2}{c-x}\right) = \alpha_1$$

$$16,\quad \frac{a}{x}\chi\left(\frac{a^2}{x}\right) - \frac{b}{c-x}\chi\left(c - \frac{b^2}{c-x}\right) = -\alpha_2$$

$$17,\quad \frac{a}{x}\psi\left(\frac{a^2}{x}\right) - \frac{b}{c-x}\psi\left(c - \frac{b^2}{c-x}\right) = a\frac{\alpha_1}{x}$$

$$18,\quad \frac{a}{x}\xi\left(\frac{a^2}{x}\right) - \frac{b}{c-x}\psi\left(c - \frac{b^2}{c-x}\right) = -b\frac{\alpha_2}{c-x},$$

indem er die Function $f(x)$ zerlegt in die Functionen

$$\varphi(x) + \chi(x) + \psi(x) + \xi(x).$$

Zu den Gleichungen 15, 16, 17, 18, tritt dann noch die erste der Gleichungen I, in der Form

$$\varphi(x) + \chi(x) + \psi(x) + \xi(x)$$
$$= -\frac{a}{x}\left[\varphi\left(\frac{a^2}{x}\right) + \psi\left(\frac{a^2}{x}\right) + \chi\left(\frac{a^2}{x}\right) + \xi\left(\frac{a^2}{x}\right)\right] + \frac{a\alpha_1}{x} + \alpha_1$$

der er genügt durch die Annahmen

$$19,\quad \varphi(x) = -\frac{a}{x}\psi\left(\frac{a^2}{x}\right) + \frac{a\alpha_1}{x}$$

$$20,\quad \chi(x) = -\frac{a}{x}\xi\left(\frac{a^2}{x}\right),$$

aus denen sowohl, wie aus der vorigen Bedingungsgleichung folgt:

$$21,\quad \psi(x) = -\frac{a}{x}\varphi\left(\frac{a^2}{x}\right) + \alpha_1$$

$$22, \quad \xi(x) = -\frac{a}{x}\,\chi\left(\frac{a^2}{x}\right).$$

Die Integration aller dieser Functionalgleichungen von 15, bis 22, hat keine Schwierigkeit, weil man durch 14, bereits die Form der integrirenden Function kennt. In Wirklichkeit ist aber nur eine Integration von 15, und 16, nöthig, um φ, und χ zu bestimmen, denn sind diese bestimmt, so folgen aus 21, und 22, auch die Functionen ψ und ξ und es zeigt sich alsdann, dass die Gleichungen 17, und 18, von selbst erfüllt sind. Die Integration von 15, und 16, gelingt aber bequem dadurch, dass gemäss der Gleichung 14, die linken Seiten zwei unendliche Reihen enthalten, deren Glieder sich gegenseitig, bis auf das erste Glied der einen Reihe, das gleich ist, der entsprechenden rechten Seite der Gleichungen 15, und 16, vernichten. Die Bedingung für das gegenseitige Vernichten der Glieder der genannten Reihen führt auf eine Differenzengleichung, der genügt wird durch Ausdrücke von der Form:

$$p_1\,\alpha'^{\,n} + p_2\,\alpha''^{\,n},$$

wo p_1 und p_2 Constanten sind, die sich dadurch bestimmen lassen, dass man das Verhalten von V in den beiden Kugelmittelpunkten bereits kennt und wo α' und α'' die Wurzeln der in α quadratischen Gleichung

$$\alpha^2 - \frac{c^2 - a^2 - b^2}{ab}\,\alpha + 1 = 0$$

bedeuten.

Die Resultate, zu denen Riemann gelangt, sind übrigens ganz conform mit denen, auf die wir durch die folgende Analyse von Thomson geführt werden. Aus diesem Grunde begnügen wir uns hier mit dem kurz skizzirten Gange der Riemann'schen Rechnung und wenden uns zu der Lösung des vorgelegten Problemes, die Thomson (On the Mutual Attraction or Repulsion between two Electrified Spherical Conductors. Philosoph. Magazin IV. Series 5.) gab.

Thomson wendet die von uns in §. 6. Cap. II. und speciell in §. 5. Cap. III. angegebenen Sätze über die Influenzelektricität zur Lösung des vorgelegten Problemes an. Demnach muss die Gesammtpotentialfunction V aller

vorhandenen Elektricität bestehen aus den Summen der Potentialfunctionen der Elektricitätsmengen, die den Kugeln ursprünglich mitgetheilt worden sind und die man sich in den Kugelmittelpunkten vereinigt denken kann und aus den Potentialfunctionen der elektrischen Bilder, die den Mittelpunkten der beiden Kugeln entspringen.

Es bedeute nun m_0, m_1, m_2, ... die elektrische Masse, welche im Mittelpunkte der Kugel A und in den Bildpunkten angenommen werden muss, die innerhalb dieser Kugel gelegen sind in den Entfernungen x_0, x_1, x_2, ... vom Kugelmittelpunkt auf der Centrallinie beider Kugeln; bestimmt man die Lagen dieser elektrischen Massenpunkte vom Mittelpunkte der Kugel B aus, so mögen die entsprechenden Entfernungen bezeichnet werden durch η_0, η_1, η_2, ... Analoge Bedeutung mögen der Reihe nach für die Kugel B die Zeichen: μ_0, μ_1, μ_2, ... y_0, y_1, y_2, ... ξ_0, ξ_1, ξ_2, ... haben, so dass also für jeden möglichen Index n die Gleichungen gelten:

$$x_n + \eta_n = c; \qquad y_n + \xi_n = c.$$

Alsdann kann man leicht für die eben genannten Grössen die Tabelle bilden:

$$\begin{array}{llllll}
m_0 = a\,\alpha_1 & \mu_0 = b\,\alpha_2 & x_0 = 0 & \xi_0 = c & y_0 = 0 & \eta_0 = c \\
m_1 = -\frac{a}{c}\mu_0 & \mu_1 = -\frac{b}{c} m_0 & x_1 = \frac{a^2}{c} & \xi_1 = c - \frac{b^2}{c} & y_1 = \frac{b^2}{c} & \eta_1 = c - \frac{a^2}{c} \\
m_2 = -\frac{a}{\xi_1}\mu_1 & \mu_2 = -\frac{b}{\eta_1} m_1 & x_2 = \frac{a^2}{\xi_1} & \xi_2 = c - \frac{b^2}{\eta_1} & y_2 = \frac{b^2}{\eta_1} & \eta_2 = c - \frac{a^2}{\xi_1} \\
m_3 = -\frac{a}{\xi_2}\mu_2 & \mu_3 = -\frac{b}{\eta_2} m_2 & x_3 = \frac{a^2}{\xi_2} & \xi_3 = c - \frac{b^2}{\eta_2} & y_3 = \frac{b^2}{\eta_2} & \eta_3 = c - \frac{a^2}{\xi_2} \\
m_4 = -\frac{a}{\xi_3}\mu_3 & \mu_4 = -\frac{b}{\eta_3} m_3 & x_4 = \frac{a^2}{\xi_3} & \xi_4 = c - \frac{b^2}{\eta_3} & y_4 = \frac{b^2}{\eta_3} & \eta_4 = c - \frac{a^2}{\xi_3} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Man überzeugt sich aus dieser Tabelle leicht, dass die Werthe von m_n, μ_n, x_n, y_n, ausgedrückt durch a, b, c, α_1 und α_2 in nahem Zusammenhange mit den Näherungsbrüchen der beiden Kettenbrüche

$$23, \quad \cfrac{1}{c - \cfrac{b^2}{c - \cfrac{a^2}{c \ldots}}} \qquad \text{und} \qquad \cfrac{1}{c - \cfrac{a^2}{c - \cfrac{b^2}{c \ldots}}}$$

stehen, und dass, wenn wir den $n$ten **Näherungsbruch** des ersten mit $(n)_a$, des zweiten mit $(n)_b$ **bezeichnen,** wo z. B. $(1)_a = \frac{1}{c}$; $(1)_b = \frac{1}{c}$, für m_n, μ_n, x_n und y_n **die Tabelle** gilt:

$$
\begin{array}{ll}
m_0 = a\alpha_1 & x_0 = 0 \\
m_1 = -ab(1)_a\alpha_2 & x_1 = a^2(1)_a \\
m_2 = a^2b(2)_a(1)_b\,\alpha_1 & x_2 = a^2(2)_a \\
m_3 = -a^2b^2(3)_a(2)_b(1)_a\,\alpha_2 & x_3 = a^2(3)_a \\
m_4 = a^3b^2(4)_a(3)_b(2)_a(1)_b\,\alpha_1 & x_4 = a^2(4)_a \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots \\
\mu_0 = b\alpha_2 & y_0 = 0 \\
\mu_1 = -ba(1)_b\alpha_1 & y_1 = b^2(1)_b \\
\mu_2 = b^2a(2)_b(1)_a\,\alpha_2 & y_2 = b^2(2)_b \\
\mu_3 = -b^2a^2(3)_b(2)_a(1)_b\,\alpha_1 & y_3 = b^2(3)_b \\
\mu_4 = b^3a^2(4)_b(3)_a(2)_b(1)_a\,\alpha_2 & y_4 = b^2(4)_b \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots
\end{array}
$$

Anmerkung. Bis hierher etwa reichen die Betrachtungen Thomson's für den vorliegenden speciellen Zweck der Berechnung der Dichtheit der Elektricität auf den beiden Kugeln. Das zunächst folgende ist von uns speciell hinzugesetzt worden, um die Endresultate mit der Poisson'schen Rechnung conform zu machen.

Wir suchen nun zunächst die einzelnen hier auftretenden Näherungsbrüche in independenter Form darzustellen. Aus den Kettenbrüchen 23, erkennt man, dass diese Aufgabe nur für den einen Kettenbruch gelöst zu werden braucht, weil die für den andern Kettenbruch gültigen Werthe durch einfache wechselseitige Vertauschung von a und b aus den bereits berechneten Werthen hervorgehen müssen.

Die Kettenbrüche 23, sind periodisch, nennt man also x den Werth des ersten, so gilt die Gleichung:

$$a^2x = \cfrac{a^2}{c - \cfrac{b^2}{c - \cfrac{a^2}{c - \cfrac{b^2}{c \ldots}}}} = \cfrac{a^2}{c - \cfrac{b^2}{c - a^2x}}$$

hieraus folgt

$$x = \frac{c - a^2x}{c^2 - b^2 - ca^2x}.$$

Die Auflösung dieser Gleichung nach x giebt:

$$x = \frac{(c^2+a^2-b^2) \pm \sqrt{(c^2+a^2-b^2)^2-4a^2c^2}}{2a^2c}.$$

Es zeigt sich, dass man von den beiden Vorzeichen vor der Quadratwurzel der rechten Seite nur das untere gebrauchen kann; denn verwandelt man den dann für x entstehenden Ausdruck wieder in einen Kettenbruch, so erhält man:

$$\frac{-(c^2+a^2-b^2)+\sqrt{(c^2+a^2-b^2)^2-4a^2c^2}}{-2a^2c}$$

$$= \cfrac{1}{c - \cfrac{b^2}{\cfrac{c^2-a^2+b^2+\sqrt{(c^2+a^2-b^2)^2-4a^2c^2}}{2c}}}$$

$$= \cfrac{1}{c - \cfrac{b^2}{c - \cfrac{a^2}{\cfrac{(c^2+a^2-b^2)+\sqrt{(c^2+a^2-b^2)^2-4a^2c^2}}{2c}}}}.$$

Wir setzen der folgenden Rechnung wegen, zur Abkürzung:

$$E = -(c^2+a^2-b^2);\ D = -2a^2c;\ \sqrt{A} = \sqrt{(c^2+a^2-b^2)^2-4a^2c^2}$$

$$24,\quad E' = c^2-a^2+b^2;\ D' = 2c$$

$$E'' = c^2+a^2-b^2;\ D'' = 2c.$$

Zur Berechnung der Näherungsbrüche unseres Kettenbruches gehen wir aus von dem Satze, dass immer

$$25,\qquad x = \frac{Z_{n-1}\,x_{n-1} - \delta_{n-1}\,Z_{n-2}}{N_{n-1}\,x_{n-1} - \delta_{n-1}\,N_{n-2}},$$

wenn $\frac{Z_n}{N_n}$ bedeutet den n^{ten} Näherungsbruch eines Kettenbruches, dessen ganzer Werth x ist und wenn x_{n-1} bedeutet den Nenner, den der Zähler δ_{n-1} des Kettenbruches von der Form

$$\cfrac{1}{c - \cfrac{\delta_1}{c - \cfrac{\delta_2}{c - \cfrac{\delta_3}{c \ldots}}}}$$

bekommen müsste, wenn der allein bis dahin fortgesetzte Kettenbruch genau gleich x sein sollte. Wegen der Perio-

dicität des Kettenbruches 23, werden nun in bestimmter Reihenfolge die x_{n-1} und δ_{n-1} immer wieder einander gleich, ist also ein solcher sich immer wiederholender Werth von x_{n-1} x' und von δ_{n-1} δ' und ist der bis zum Bruche $\frac{\delta'}{x'}$ reichende, aber diesen Bruch noch nicht mit enthaltende Näherungsbruch des Kettenbruches $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, während der vorausgehende $\frac{P'_{n-1}}{Q'_{n-1}}$ ist, so ergiebt die Formel 25,

$$26, \quad x = \frac{P_{n-1}x' - \delta' P'_{n-1}}{Q_{n-1}x' - \delta' Q'_{n-1}}$$

und verglichen mit dem gegebenen Kettenbruch, muss die linke Seite dieser Gleichung, x, übergehen in $\frac{P_n}{Q_n}$, wenn wir auf der rechten Seite x' ersetzen durch

$$c - \frac{\delta_n}{c} = \frac{c^2 - \delta_n}{c},$$

es ist demnach

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1}(c^2 - \delta_n) - \delta' c P'_{n-1}}{Q_{n-1}(c^2 - \delta_n) - \delta' c Q'_{n-1}}.$$

Da Zähler und Nenner der rechten Seite keinen gemeinschaftlichen Divisor besitzen, so folgt:

$$27, \quad \begin{aligned} P_n &= P_{n-1}(c^2 - \delta_n) - \delta' c P'_{n-1} \\ Q_n &= Q_{n-1}(c^2 - \delta_n) - \delta' c Q'_{n-1}. \end{aligned}$$

Substituirt man die aus 27, folgenden Werthe von P'_{n-1} und Q'_{n-1} in die Gleichung 26, so folgt:

$$x = \frac{P_{n-1}\,cx' - P_{n-1}(c^2 - \delta_n) + P_n}{Q_{n-1}\,cx' - Q_{n-1}(c^2 - \delta_n) + Q_n}.$$

Hieraus folgt weiter:

$$28, \quad P_n - Q_n x = (c^2 - \delta_n - cx')(P_{n-1} - Q_{n-1}x)$$

und wenn man in dieser Gleichung dem n alle Werthe von 2, 3, ... bis n giebt und beachtet, dass dabei δ_n seinen Werth nicht ändert, so ergiebt die Multiplication aller entstandenen Gleichungen mit einander:

$$29, \quad P_n - Q_n x = [c^2 - \delta_n - cx']^{n-1}(P_1 - Q_1 x)$$

Setzt man in dieser Gleichung

$$30,\quad x = \frac{E + \sqrt{A}}{D};\ u_1 = c^2 - \delta_n - c\frac{E'}{D'};\ v_1 = \frac{c}{D'},$$
$$u_{n-1} - v_{n-1}\sqrt{A} = (u_1 - v_1\sqrt{A})^{n-1}$$

wo u_{n-1}, und v_{n-1} rationale Werthe bezeichnen sollen, so wird aus der Gleichung 29,

$$P_n - \frac{E+\sqrt{A}}{D}\,Q_n = \left(P_1 - \frac{E+\sqrt{A}}{D}\,Q_1\right)(u_{n-1} - v_{n-1}\sqrt{A}).$$

Da in dieser Gleichung ferner die rationalen und irrationalen Werthe für sich gleich sein müssen, so folgt:

$$31,\quad P_n = P_1 u_{n-1} + \left(E P_1 + \frac{A - E^2}{D}\,Q_1\right) v_{n-1}$$
$$Q_n = Q_1 u_{n-1} + (D P_1 - E Q_1)\, v_{n-1}.$$

Durch diese Gleichungen 31, ist nun die independente Berechnung der Näherungsbrüche der Kettenbrüche 23, ermöglicht. Setzt man nämlich $P_1 = 1$; $Q_1 = c$, und $\delta_n = a^2$, so fällt die Bedeutung von $\frac{P_n}{Q_n}$, wie es in den Gleichungen 31, vorkommt, zusammen mit der Bedeutung von $(2n-1)_a$; zugleich wird nach den Gleichungen 30, und 24,

$$32,\quad u_1 = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2};\ v_1 = \tfrac{1}{2}$$
$$(2n-1)_a = \frac{u_{n-1} + (c^2 + b^2 - a^2)\, v_{n-1}}{c[u_{n-1} + (c^2 - a^2 - b^2)\, v_{n-1}]}.$$

Setzt man dagegen

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{c - \frac{b^2}{c}} = \frac{c}{c^2 - b^2},\ \text{also}\ \delta_n = b^2,$$

so hat man jetzt in den Gleichungen 30, statt E' und D', E'' und D'' zu schreiben und die dafür in 24, gegebenen Werthe zu benützen, man findet

$$u_1 = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2};\ v_1 = \tfrac{1}{2}$$

wie oben, während die jetzt entstehenden Näherungsbrüche die früher mit $(2n)_a$ bezeichneten sind, so dass entsteht:

$$33,\quad (2n)_a = \frac{c\,[u_{n-1} + (c^2 - a^2 - b^2)\, v_{n-1}]}{(c^2 - b^2)\,u_{n-1} + [(c^2 - b^2)(c^2 + a^2 - b^2) - 2a^2c^2]\,v_{n-1}}.$$

Durch die Gleichungen 32, und 33, ist die gesuchte independente Darstellung der Näherungsbrüche des ersten Kettenbruches 23, erfüllt bis auf eine bequeme Darstellung von u_{n-1} und v_{n-1}.

Da aber für beide Arten von Näherungsbrüchen, wie sie durch die Gleichungen 32, und 33, bestimmt sind, u_1 und v_1 denselben Werth hatte und da ferner

$$\sqrt{(c^2+a^2-b^2)^2-4a^2c^2}=\sqrt{(c^2-a^2-b^2)^2-4a^2b^2},$$

so können wir für beide Fälle die, die u_{n-1} und v_{n-1} definirende Gleichung 30, schreiben

$$\frac{u_{n-1}-v_{n-1}\sqrt{(c^2-a^2-b^2)^2-4a^2b^2}}{(ab)^{n-1}}=\left(\frac{(c^2-a^2-b^2)-\sqrt{(c^2-a^2-b^2)^2-4a^2b^2}}{2ab}\right)^{n-1},$$

oder auch, da u_{n-1} und v_{n-1} rationale Werthe bezeichnen sollen, wir demgemäss auch der Quadratwurzel das entgegengesetzte Vorzeichen geben können

$$\frac{u_{n-1}+v_{n-1}\sqrt{(c^2-a^2-b^2)^2-4a^2b^2}}{(ab)^{n-1}}=\left(\frac{(c^2-a^2-b^2)+\sqrt{(c^2-a^2-b^2)^2-4a^2b^2}}{2ab}\right)^{n-1}.$$

Die Basen der rechten Seiten der letzten beiden Gleichungen sind aber nichts anderes als die beiden Wurzeln der in α quadratischen Gleichung

$$34,\quad \alpha^2-\frac{c^2-a^2-b^2}{ab}\alpha+1=0,$$

ist daher α' die grössere, α'' die kleinere der beiden Wurzeln dieser Gleichung, so erhält man aus den beiden vorhergehenden Gleichungen

$$35,\quad u_{n-1}=\frac{(ab\alpha')^{n-1}+(ab\alpha'')^{n-1}}{2};\quad v_{n-1}=\frac{(ab\alpha')^{n-1}-(ab\alpha'')^{n-1}}{2\sqrt{(c^2-a^2-b^2)^2-4a^2b^2}}$$

während α' und α'' noch die Relationen erfüllen

$$36,\quad c^2-a^2-b^2=ab(\alpha'+\alpha'');$$
$$\sqrt{(c^2-a^2-b^2)^2-4a^2b^2}=ab(\alpha'-\alpha'');\ \alpha'.\alpha''=1.$$

Setzt man die Werthe von u_{n-1} und v_{n-1} aus den Gleichungen 35, in die Gleichungen 32, und 33, ein und benützt zugleich die Gleichungen 36, so ergiebt sich:

$$37,\quad (2n)_a=\frac{c(\alpha'^n-\alpha''^n)}{a^2(\alpha'^n-\alpha''^n)+ab(\alpha'^{n+1}-\alpha''^{n+1})},$$

ein Näherungsbruch der auch noch für $n = 0$ den brauchbaren Werth, nämlich Null ergiebt:

$$38, \quad (2n-1)_a^3 = \frac{a(\alpha'^n - \alpha''^n) + b(\alpha'^{n-1} - \alpha''^{n-1})}{ca(\alpha'^n - \alpha''^n)}.$$

Durch einfache Vertauschung von a mit b und umgekehrt, wobei sich, wie leicht ersichtlich, die Werthe von α' und α'' nicht ändern, erhält man hieraus noch die Werthe von $(2n)_b$ und $(2n-1)_b$.

Für die Producte $(2n-1)_b\,(2[n-1])_a$ und $(2n-1)_a\,(2[n-1])_b$ erhält man

$$39, \quad (2n-1)_b\,(2[n-1])_a = \frac{\alpha'^{n-1} - \alpha''^{n-1}}{ab(\alpha'^n - \alpha''^n)} = (2n-1)_a(2[n-1])_b.$$

Vermittelst der Gleichungen 37, 38, und 39, finden wir nun für m_n, μ_n, x_n, y_n aus der früheren Tabelle die Werthe:

$$40, \quad x_{2n} = \frac{ac(\alpha'^n - \alpha''^n)}{a(\alpha'^n - \alpha''^n) + b(\alpha'^{n+1} - \alpha''^{n+1})}$$

$$41, \quad x_{2n-1} = \frac{a^2(\alpha'^n - \alpha''^n) + ab(\alpha'^{n-1} - \alpha''^{n-1}}{c(\alpha'^n - \alpha''^n)}$$

$$42, \quad y_{2n} = \frac{bc(\alpha'^n - \alpha''^n)}{b(\alpha'^n - \alpha''^n) + a(\alpha'^{n+1} - \alpha''^{n+1})}$$

$$43, \quad y_{2n-1} = \frac{b^2(\alpha'^n - \alpha''^n) + ab(\alpha'^{n-1} - \alpha''^{n-1})}{c(\alpha'^n - \alpha''^n)}$$

$$44, \quad m_{2n} = \frac{ab(\alpha' - \alpha'')\alpha_1}{a(\alpha'^n - \alpha''^n) + b(\alpha'^{n+1} - \alpha''^{n+1})}$$

$$45, \quad m_{2n-1} = -\frac{ab(\alpha' - \alpha'')\alpha_2}{c(\alpha'^n - \alpha''^n)}$$

$$46, \quad \mu_{2n} = \frac{ab(\alpha' - \alpha'')\alpha_2}{b(\alpha'^n - \alpha''^n) + a(\alpha'^{n+1} - \alpha''^{n+1})}$$

$$47, \quad \mu_{2n-1} = -\frac{ab(\alpha' - \alpha'')\alpha_1}{c(\alpha'^n - \alpha''^n)}.$$

Mit Hülfe der Formeln 40, bis 47, können wir nun leicht die Potentialfunction der in jeder einzelnen Kugel vorhandenen Elektricität auf Punkte der Centrallinie bestimmen. Man muss nämlich für die Kugel A erhalten

$$V_a = \sum_0^\infty {}_n \frac{m_n}{x \mp x_n},$$

für die Kugel B

$$V_b = \sum_0^\infty {}^n \frac{\mu_n}{y \mp y_n},$$

wobei die Vorzeichen im Nenner so zu bestimmen sind, dass dieser selbst immer positiv bleibt. Durch Einsetzen der für m_n, μ_n, x_n und y_n gefundenen Werthe wird aber

$$48, \quad \begin{aligned} V_a &= ab\alpha_1 \sum_0^\infty {}^n \frac{\alpha' - \alpha''}{a(x \mp c)(\alpha'^n - \alpha''^n) + bx(\alpha'^{n+1} - \alpha''^{n+1})} \\ &\quad - ab\alpha_2 \sum_1^\infty {}^n \frac{\alpha' - \alpha''}{(cx \mp a^2)(\alpha'^n - \alpha''^n) \mp ab(\alpha'^{n-1} - \alpha''^{n-1})} \,. \\ V_b &= ab\alpha_2 \sum_0^\infty {}^n \frac{\alpha' - \alpha''}{b(y \mp c)(\alpha'^n - \alpha''^n) + ay(\alpha'^{n+1} - \alpha''^{n+1})} \\ &\quad - ab\alpha_1 \sum_1^\infty {}^n \frac{\alpha' - \alpha''}{(cy \mp b^2)(\alpha'^n - \alpha''^n) \mp ba(\alpha'^{n-1} - \alpha''^{n-1})} \,. \end{aligned}$$

Die Gesammtpotentialfunction aller vorhandenen Elektricität ist nothwendig

$$V = V_a + V_b \,.$$

Zu demselben Resultate 48, gelangt auch Riemann in seiner Rechnung.

Um aus dem Werthe von V_a in 48, den Werth dieser Potentialfunction auf irgend einen Punkt $r_1 \theta_1 \varphi_1$ ausserhalb der Kugel A zu erhalten, bemerken wir zunächst, dass diese Potentialfunction der vorhandenen Symmetrie zur Centrallinie wegen unabhängig von φ_1 sein muss und dass ein ganz entsprechender Weg auf die gesuchte Potentialfunction führen muss, wie jener Weg war, der von den Gleichungen 7, und 8, auf die Gleichungen 9, und 10, führte. Es entsteht

$$49, \quad \begin{aligned} V_a &= ab\alpha_1 \sum_0^\infty {}^n \frac{\alpha' - \alpha''}{\sqrt{p_n^2 r_1^2 - 2 p_n q_n a r_1 \cos\theta_1 + q_n^2 a^2}} \\ &\quad - ab\alpha_2 \sum_1^\infty {}^n \frac{\alpha' - \alpha''}{\sqrt{p_n'^2 r_1^2 - 2 p_n' q_n' a r_1 \cos\theta_1 + q_n'^2 a^2}} \,, \end{aligned}$$

wenn noch

$$p_n = a(\alpha'^n - \alpha''^n) + b(\alpha'^{n+1} - \alpha''^{n+1}); \; q_n = c(\alpha'^n - \alpha''^n)$$
$$p'_n = c(\alpha'^n - \alpha''^n); \; q_n' = a(\alpha'^n - \alpha''^n) + b(\alpha'^{n-1} - \alpha''^{n-1}).$$

Verwechselt man in diesen letzten Formeln a mit b und α_1 mit α_2, so erhält man die für V_b gültigen Werthe, wenn ausserdem noch statt r_1 r_2 und statt θ_1 θ_2 geschrieben wird. Um ferner die Dichtheit der Elektricität auf beiden Kugeln zu bekommen, benützen wir den Satz I, §. 6. Cap. I., indem wir wissen, dass die Potentialfunction der auf der Kugel A befindlichen Elektricität für Punkte ausserhalb dieser Kugel den durch 49, bestimmten Werth V_a hat, und dass man aus diesem Werthe von V_a nach den Gleichungen 4, und 5, §. 5. leicht die Potentialfunction der auf der Kugel A befindlichen Elektricität auf Punkte innerhalb dieser Kugel herstellen kann; dabei ist es unnöthig auf die Potentialfunction der auf der Kugel B befindlicheu Elektricität Rücksicht zu nehmen, weil deren erste Derivirte sich für alle Punkte ausserhalb der Kugel B selbst stetig ändern, zugleich fällt die Differentiation von V nach der Flächennormale der Kugel A zusammen mit der Differentiation nach r_1. Hiernach entsteht für die elektrische Dichtheit ϱ_a auf der Kugel A

$$50, \quad \varrho_a = -\frac{1}{4\pi}\left[2\left(\frac{\partial V_a}{\partial r_1}\right)_{r_1=a} + \left(\frac{V_a}{a}\right)_{r_1=a}\right].$$

Vertauscht man in dieser Gleichung a und b wechselseitig und nimmt statt r_1 und θ_1 r_2 und θ_2, so erhält man das für die Kugel B gültige Resultat.

Will man die elektrische Dichtheit in den Punkten der Centrallinie haben, so reichen die in 48, angegebenen Werthe für V_a und V_b aus, wenn man noch in 50, statt

$$\left(\frac{\partial V_a}{\partial r_1}\right)_{r_1=a} \quad \left(\frac{\partial V_a}{\partial x}\right)_{x=a}$$

und statt

$$\left(\frac{V_a}{a}\right)_{r_1=a} \quad \left(\frac{V_a}{a}\right)_{x=a}$$

geschrieben denkt, und das obere Vorzeichen in dem in 48, gegebenen Werthe von V_a benützt, wenn man die elektrische Dichtheit in dem der Kugel B zugewandten Punkte sucht, das untere, wenn die elektrische Dichtheit des entgegengesetzt gelegenen Punktes gesucht wird.

Dieselben Ergebnisse, wie sie durch die Gleichung 50, dargestellt werden, erhielt Poisson in seinen Gleichungen 11,

und es entstehen aus der Gleichung 50, jene Poisson'schen Formeln für die elektrische Dichtheit, wenn man für α_1 $4\pi\alpha_1$, für α_2 $4\pi\alpha_2$ schreibt und wenn man weiter berücksichtigt, dass in Poisson's Formeln die Wurzeln α' und α'' gehören zu der Gleichung

$$\alpha^2 - \frac{c^2 - a^2 - b^2}{a} \alpha + b^2 = 0,$$

während für die Gleichung 50, α' und α'' die Wurzeln der Gleichung

$$\alpha^2 - \frac{c^2 - a^2 - b^2}{ab} \alpha + 1 = 0$$

darstellen. Hierdurch ist nun auch die Uebereinstimmung zwischen den drei verschiedenen Analysen von Poisson, Riemann und Thomson nachgewiesen. C. Neumann hat durch die Anwendung eines besonderen Coordinatensystemes in seiner Arbeit „Allgemeine Lösung des Problemes über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von irgend zwei nicht concentrischen Kugelflächen begrenzt ist. Halle 1862" und im Auszuge: Journal von Crelle Bnd. 62. Seite 36—49 ebenfalls eine Lösung des vorgelegten Problemes gegeben, wir werden diese Rechnung in dem folgenden Capitel berücksichtigen, indem wir Neumann's Coordinatensystem genauer besprechen. —

Um den Verlauf der Dichtigkeit der Elektricität auf zwei Kugeln übersichtlicher zu haben, hat Poisson ein Beispiel numerisch weiter gelöst, wir geben hier diese Resultate Poisson's tabellarisch noch an:

Die Kugeln mögen die Halbmesser 1 und 3 besitzen und der Abstand ihrer Mittelpunkte 5 betragen, ferner werde mit A die mittlere elektrische Dichtheit auf der Kugel mit dem Radius 1, mit B die auf der Kugel mit dem Radius 3 bezeichnet, wo also A und B die wirklichen Dichtheiten bezeichnen würden, wenn plötzlich die Kugeln in unendliche Entfernung von einander rückten. Dann gilt:

θ_1 od. θ_2	Dichtheit auf der Kugel mit dem Radius 1.	Dichtheit auf der Kugel mit dem Radius 3.
0^0	$1{,}2348\,A - 1{,}6369\,B$	$1{,}2461\,B - 0{,}6277\,A$
$22\frac{1}{2}^0$	$1{,}1786\,A - 1{,}3887\,B$	$1{,}0524\,B - 0{,}2769\,A$
45^0	$1{,}0779\,A - 0{,}8402\,B$	$0{,}9961\,B - 0{,}0495\,A$
$67\frac{1}{2}^0$	$1{,}0074\,A - 0{,}2709\,B$	$0{,}9924\,B + 0{,}0176\,A$
90^0	$0{,}9703\,A + 0{,}2782\,B$	$0{,}9928\,B + 0{,}0405\,A$
$112\frac{1}{2}^0$	$0{,}9524\,A + 0{,}4847\,B$	$0{,}9933\,B + 0{,}0499\,A$
135^0	$0{,}9441\,A + 0{,}6765\,B$	$0{,}9937\,B + 0{,}0543\,A$
$157\frac{1}{2}^0$	$0{,}9405\,A + 0{,}7822\,B$	$0{,}9938\,B + 0{,}0563\,A$
180^0	$0{,}9393\,A + 0{,}8131\,B$	$0{,}9938\,B + 0{,}0569\,A$.

Die constanten Dichtheiten A und B können hierbei nach Willkür gewählt werden und aus ihnen folgen in leicht ersichtlicher Weise die Mengen und Arten von Elektricitäten, die man beiden Kugeln mitzutheilen hat, wenn man besondere elektrische Vertheilungszustände auf beiden Kugeln erzielen will.

Um die Mengen Q_1 und Q_2 der auf den Kugeln A und B vorhandenen freien Elektricitätsmengen zu bestimmen, benützen wir den in §. 7. Cap. II. erwähnten Zusammenhang zwischen der wirksamen Masse und deren Potentialfunction auf einen unendlich entfernten Punkt. Gebrauchen wir hierbei die Werthe von V_a und V_b, wie sie in 48, genannt werden, so erhalten wir

$$Q_1 = \lim_{x=\infty} x\, V_a; \quad Q_2 = \lim_{y=\infty} y\, V_b.$$

Oder

$$Q_1 = ab\alpha_1 \sum_0^\infty {}^n \frac{\alpha' - \alpha''}{a(\alpha'^n - \alpha''^n) + b(\alpha'^{n+1} - \alpha''^{n+1})} - ab\alpha_2 \sum_1^\infty {}^n \frac{\alpha' - \alpha''}{c(\alpha'^n - \alpha''^n)}$$

51,

$$Q_2 = ab\alpha_2 \sum_0^\infty {}^n \frac{\alpha' - \alpha''}{b(\alpha'^n - \alpha''^n) + a(\alpha'^{n+1} - \alpha''^{n+1})} - ab\alpha_1 \sum_1^\infty {}^n \frac{\alpha' - \alpha''}{c(\alpha'^n - \alpha''^n)}.$$

Schreibt man die rechten Seiten dieser beiden Gleichungen in leicht verständlicher Abkürzung:

$$Q_1 = \alpha_1 p - \alpha_2 q$$
$$Q_2 = \alpha_2 p' - \alpha_1 q,$$

wo nun p, p' und q bekannte Werthe sind, so kann man aus diesen beiden Gleichungen leicht α_1 und α_2 berechnen,

wenn, wie es gewöhnlich der Fall sein dürfte, die Elektricitätsmengen Q_1 und Q_2, die übereinstimmen mit den den Kugeln A und B direct mitgetheilten Elektricitätsmengen, bekannt sind; man findet

$$\alpha_1 = \frac{Q_1 p' + Q_2 q}{p p' - q^2}$$

$$\alpha_2 = \frac{Q_2 p + Q_1 q}{p p' - q^2} .$$

Setzt man auf der rechten Seite der ersten der Gleichungen 51, $\alpha_1 = 0$, in der zweiten $\alpha_2 = 0$, so findet man unter der Bedingung, dass für die dann noch in beiden Gleichungen verbleibenden Werthe von α_2 und α_1 die Beziehung $\alpha_1 = \alpha_2$ gilt, eine Bestätigung des Riemann'schen Satzes in §. 7. Cap. II.

Wir haben bisher immer angenommen, dass $c > a + b$, die beiden Kugeln A und B also einander nicht berühren. In diesem Falle besassen nicht nur die Poisson'schen unendlichen Reihen, 7, 8, 9, 10, 11, wie man sich leicht überzeugen kann, eine ziemlich rasche Convergenz, sondern es galt die Convergenz auch für die Kettenbrüche 23, und deren in den Gleichungen 48, 49, und 50, enthaltenen Folgerungen. Diess gilt, wie nahe auch die beiden Kugeln A und B an einander gebracht werden, nur im Grenzfalle $c = a + b$ selbst tritt eine Aenderung ein. Dann ergiebt sowohl die Gleichung 6, als auch die Gleichung 34, $\alpha' = \alpha''$, der Werth der Kettenbrüche 23, ist nicht mehr irrational und die Entwickelungen 7, 8, 9, 10, 11, 48, 49, 50, fallen unter die allgemeine Form $\frac{0}{0}$, zugleich lehren die allgemeinen Untersuchungen in §. 6. Cap. II., dass auch jetzt noch sowohl die Ladung als auch die Potentialfunction eines jeden Leiters eine endliche Grösse bleibe. Um daher das Verhalten der beiden Kugeln A und B im Falle der Berührung, oder wenn $c = a + b$ zu finden, brauchen wir nur nach der gewöhnlichen Methode die Gleichungen 48, 49, 50, für den Grenzfall $\alpha' = \alpha''$, wo die rechten Seiten jener Gleichungen die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, zu untersuchen. Zugleich wissen wir auch, dass bei leitender Berührung, wie wir immer annehmen, $\alpha_1 = \alpha_2$; wir gebrauchen daher, weil beide Kugeln im Fall der Berührung, so zu sagen nur einen einzigen

Leiter bilden, zur Bezeichnung der constanten Potentialfunction den Buchstaben α. Zugleich möge im vorliegenden Falle

$$52, \qquad c = a + b = 1$$

also a und b ächte Brüche sein.

Dividirt man auf den rechten Seiten der Gleichungen 51, die einzelnen Summanden der rechten Seiten im Zähler und Nenner durch $\alpha' - \alpha''$, setzt hierauf $\alpha' = \alpha'' = 1$ und beachtet 52, so erscheint

$$Q_1 = ab\alpha \sum_0^\infty {}^n \left(\frac{1}{n+b} - \frac{1}{n+1}\right); \; Q_2 = ab\alpha \sum_0^\infty {}^n \left(\frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Nun ist, wenn $m > -1$

$$\int_0^1 x^m \, dx = \frac{1}{m+1},$$

wir können daher für Q_1 schreiben

$$Q_1 = ab\alpha \int_0^1 \{[x^{b-1} + x^b + x^{b+1} + x^{b+2} + \ldots] - [1 + x + x^2 + x^3 + \ldots]\} dx$$

$$= ab\alpha \int_0^1 (x^{b-1} - 1)(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) dx = ab\alpha_a \int_0^1 \frac{x^{b-1} - 1}{1 - x} \, dx,$$

demnach entsteht:

$$Q_1 = ab\alpha \int_0^1 \frac{x^{b-1} - 1}{1 - x} \, dx; \; Q_2 = ab\alpha \int_0^1 \frac{x^{a-1} - 1}{1 - x} \, dx.$$

Wir führen in diese Gleichungen die Function $\Gamma\mu$ nach der bekannten Definitionsgleichung

$$\Gamma\mu = \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} dx$$

ein, eine Function, die die bekannte Eigenschaft hat, dass der Differentialquotient ihres natürlichen Logarithmus bestimmt wird durch die Gleichung:

$$\frac{\partial l.\, \Gamma\mu}{\partial \mu} = \int_0^1 \frac{1 - x^{\mu-1}}{1 - x} \, dx - C.$$

Hierin bedeutet C eine, übrigens wieder aus der hier vorzunehmenden Rechnung herausfallende, Constante, nämlich, wie die Gleichung selbst ergiebt, da $\Gamma 1 = 1$

$$\left(\frac{\partial \Gamma \mu}{\partial \mu}\right)_{\mu=1} = -C.$$

Diese Constante C tritt auch anderwärts als Constante des Integrallogarithmus, oder als Grenzwerth des Ausdruckes

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left\{1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \tfrac{1}{n} - ln\right\} = C$$

auf und kann leicht berechnet werden aus der Gleichung

$$C = 1 - l2 + \tfrac{1}{2}(S_2 - 1) - \tfrac{1}{3}(S_3 - 1) + \ldots$$

wenn allgemein

$$53, \quad S_m = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \ldots$$

Man findet

$$C = 0{,}57721\ 56649 \ldots$$

Für Q_1 und Q_2 erhalten wir nun

$$54, \quad Q_1 = ab\alpha_1\left(-C - \frac{\partial l\Gamma b}{\partial b}\right); \; Q_2 = ab\alpha_2\left(-C - \frac{\partial l\Gamma a}{\partial a}\right).$$

Zur Berechnung von $\frac{\partial l\Gamma\mu}{\partial\mu}$ kann man noch die Formeln gebrauchen

$$\frac{\partial l\Gamma x}{\partial x} = -\frac{1}{x} + \frac{\partial l\Gamma 1+x}{\partial x},$$

$$\frac{\partial l\Gamma 1+x}{\partial x} = -C + S_2 x - S_3 x^2 + S_4 x^3 - S_5 x^4 \pm \ldots$$

wo die S durch Gleichung 53, definirt sind und die Werthe haben:

S_2=1,64493407; S_3=1,20205690; S_4=1,08232323; S_5=1,03692775
S_6=1,01734306; S_7=1,00834928; S_8=1,00407736; S_9=1,00200839
S_{10}=1,00099457; S_{11}=1,00049419; S_{12}=1,00024609; S_{13}=1,00012271

. . . .

Die für $\frac{\partial l\Gamma 1+x}{\partial x}$ angegebene Reihe convergirt sehr rasch, zumal da sie nur für $x < \frac{1}{2}$ benützt zu werden braucht, denn für $x > \frac{1}{2}$ hat man die Reductionsformel

$$\Gamma x \, \Gamma 1-x = \frac{\pi}{\sin x\pi}$$

woraus folgt:

$$\frac{\partial l \Gamma x}{\partial x} = -\pi ctg\, x\pi - \frac{\partial}{\partial x}\, l\Gamma 1-x$$

$$= -\pi ctg\, x\pi + \frac{1}{1-x} - \frac{\partial}{\partial x} l\Gamma 1 + (1-x),$$

und jetzt ist $1-x < \frac{1}{2}$, also auch das Argument der oben für $\frac{\partial l \Gamma 1+x}{\partial x}$ angegebenen Reihe.

Durch die vorstehenden Formeln kann die Berechnung der Elektricitätsmengen Q_1 und Q_2 mit Leichtigkeit ausgeführt werden. Es wird diese Berechnung richtig bei der Lösung der praktischen Aufgabe, ein gegebenes Quantum von Elektricität in zwei bestimmte Theile zu theilen oder zu fractioniren. Denken wir uns die gegebene Elektricitätsmenge als auf einer Kugel haftend, so handelt es sich darum, den Radius einer andern leitenden Kugel zu bestimmen, die, mit der ersten Kugel in Berührung gebracht, so viel Elektricität aufnimmt, als der eine vorgeschriebene Theil des zu fractionirenden Elektricitätsquantums besagt. Es sind zu diesem Zweck umfangreiche Tabellen von Plana[1]) angefertigt worden. Wir geben im Folgenden eine Tabelle, welche die Ausführung der Fractionirung ermöglichen soll und es bedeute n das Verhältniss der Radien beider Kugeln, $\frac{Q_1}{Q_2}$ das Verhältniss der auf den beiden Kugeln befindlichen Elektricitätsmengen, wobei es selbstverständlich ist, dass auf der grösseren Kugel auch die grössere Elektricitätsmenge angehäuft ist.

1) Plana: Mémoires de l'Acad. d. Scienc. Turin sér. 2 t. 7. Sur la distribution de l'électr. à la surface de 2 sphères. Turin 1845. 4[to] 333 pages. Vergleiche über diesen Gegenstand auch Riess: Die Lehre von der Reibungselektricität Bnd. I, §. 230.

n	$\frac{Q_1}{Q_2}$	n	$\frac{Q_1}{Q_2}$	n	$\frac{Q_1}{Q_2}$	n	$\frac{Q_1}{Q_2}$
1	1,00000	2,0	3,44770	7,0	34,3911	14	129,134
1,1	1,11876	2,5	5,15592	7,5	39,2254	15	147,532
1,2	1,38345	3,0	7,17640	8,0	44,3149	20	257,756
1,3	1,59551	3,5	9,50880	8,5	49,7089	30	569,417
1,4	1,83091	4,0	12,1504	9,0	55,408	40	1002,67
1,5	2,05950	4,5	15,0973	9,5	61,1108	50	1557,54
1,6	2,31129	5,0	18,3562	10	67,7185	75	3476,09
1,7	2,57605	5,5	21,9190	11	81,2468	100	6085,82
1,8	2,85375	6,0	25,699	12	95,9925	200	24469,8.
1,9	3,14433	6,5	29,9617	13	111,955		

Will man also z. B. ein auf einer Kugel gegebenes elektrisches Quantum in drei gleiche Theile zerlegen, so ersieht man aus der Tabelle, dass, wenn man die Kugel berührt mit einer andern, deren Radius das $\frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$ fache des Radius der gegebenen Kugel ist, auf der ersten Kugel nahezu $\frac{2}{3}$, auf der Berührungskugel nahezu $\frac{1}{3}$ der gegebenen Elektricität sich ansammelt. Isolirt man daher die Hülfskugel wiederum, so hat man auf ihr nahezu den dritten Theil der gegebenen Elektricität. Berührt man jetzt die gegebene Kugel mit einer anderen von gleichem Radius, so vertheilt sich die auf der gegebenen Kugel noch vorhandene Elektricität zu gleichen Theilen über beide Kugeln. Isolirt man jetzt wiederum die letzteren beiden Kugeln, so muss sich auf jeder von ihnen nahezu $\frac{1}{3}$ des ursprünglich gegebenen Elektricitätsquantums vorfinden. Auf dem gewöhnlichen Wege der Interpolation kann man vorliegende Tabelle nun noch vervollständigen.

Aus der Tabelle ersieht man, wie sich bei Kleinerwerden der einen Kugel allmählig die Hauptmenge der vorhandenen Elektricität auf der grössern Kugel allein ansammelt, gehen wir zur Grenze für ein verschwindendes b, also $a = 1$ über, so entsteht

$$Q_1 = ab\alpha \sum_0^\infty {}_n \left(\frac{1}{n+b} - \frac{1}{n+1}\right) = ab\alpha \sum_0^\infty {}_n \left(\frac{1}{n+1-a} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= a b \alpha \left[\frac{1}{1-a} + \sum_0^\infty {}_n \left(\frac{1}{n+2-a} - \frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$= a b \alpha \left[\frac{1}{b} + \sum_0^\infty {}_n \left(\frac{1}{n+2-a} - \frac{1}{n+1}\right)\right]$$

und wenn man jetzt den Grenzübergang ausführt, so wird

$$Q_1 = a\alpha = \alpha$$

und die mittlere Dichtheit auf der grösseren Kugel A ist

$$D_1 = \frac{Q_1}{4a^2\pi} = \frac{\alpha}{4a\pi} = \frac{\alpha}{4\pi}.$$

Für die andere Kugel B erhält man

$$Q_2 = a b \alpha \sum_0^\infty {}_n \left(\frac{1}{n+1-b} - \frac{1}{n+1}\right) = a b^2 \alpha \sum_0^\infty {}_n \frac{1}{(n+1)(n+1-b)};$$

Nun ist $\sum_0^\infty {}_n \frac{1}{(n+1)(n+1-b)}$ auch für Lim $b = 0$ ein endlicher Werth, folglich nähert sich die Quantität Q_2 der auf der kleineren Kugel haftenden Elektricität der Null, wenn der Radius b dieser Kugel sich ebenfalls der Null nähert; für die mittlere Dichtheit D_2 auf dieser Kugel entsteht aber

$$D_2 = \frac{Q_2}{4b^2\pi} = \frac{a\alpha}{4\pi} \sum_0^\infty {}_n \frac{1}{(n+1)(n+1-b)},$$

und wenn man zur Grenze für ein verschwindendes b übergeht

$$D_2 = \frac{a\alpha}{4\pi} \sum_0^\infty {}_n \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Oder da bekanntlich

$$\sum_0^\infty {}_n \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\cdots = \frac{\pi^2}{6} = 1{,}6449\cdots,$$

so entsteht

$$D_2 = \frac{a\alpha}{4\pi} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\alpha}{4\pi} \cdot \frac{\pi^2}{6} \text{ wenn Lim } b = 0;\ a = 1.$$

und demnach

$$\underset{b=0}{\text{Lim}} \frac{D_2}{D_1} = \frac{\pi^2}{6} = 1{,}6449 \cdots$$

Coulomb[1]) schloss aus seinen Versuchen auf die Verhältnisszahl 2.

Wir wenden uns jetzt noch dazu, die Formeln 48, und 49, für den Fall, dass sich beide Kugeln berühren, umzugestalten. Die Formel 48, ergiebt im Falle $c = a + b = 1$, also $\alpha' = \alpha''$, wenn wir Zähler und Nenner der rechten Seite durch $\alpha' - \alpha''$ dividiren und dann zur Grenze $\alpha' = \alpha'' = 1$ übergehen

$$V_a = ab\alpha\left\{\sum_0^{x}{}_n \frac{1}{axn \mp an + bx(n+1)} - \sum_1^{\infty}{}_n \frac{1}{(x \mp a^2)n \mp ab(n-1)}\right\}.$$

Oder auch, wenn man $b = 1 - a$ setzt,

$$V_a = ab\alpha\left\{\sum_0^{x}{}_n \left(\frac{1}{n(ax \mp a) + (1-a)x(n+1)} - \frac{1}{(x \mp a^2)(n+1) \mp a(1-a)n}\right)\right\}$$

$$= ab\alpha\,\frac{1}{x \mp a}\left\{\sum_0^{\infty}{}_n \left[\left(\frac{1}{n + \frac{(1-a)x}{x \mp a}} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{n + \frac{x \mp a^2}{x \mp a}} - \frac{1}{n+1}\right)\right]\right\}.$$

Jetzt kann man dieselbe Transformation anwenden, die oben bei der Umgestaltung des Werthes von Q_1 gebraucht wurde, man erhält:

$$55^*, \quad V_a = \frac{ab\alpha}{x \mp a}\left\{\int_0^1 \frac{t^{\frac{(1-a)x}{x \mp a} - 1} - 1}{1-t}\,dt - \int_0^1 \frac{t^{\frac{x \mp a^2}{x \mp a} - 1} - 1}{1-t}\,dt\right\}$$

oder auch

$$55, \quad V_a = \frac{ab\alpha}{x \mp a}\left[\frac{\partial\, l\,\Gamma \frac{x \mp a^2}{x \mp a}}{\partial \frac{x \mp a^2}{x \mp a}} - \frac{\partial\, l\,\Gamma \frac{(1-a)x}{x \mp a}}{\partial \frac{(1-a)x}{x \mp a}}\right]$$

und hieraus durch einfache Buchstabenvertauschung:

$$56, \quad V_b = \frac{ab\alpha}{y \mp b}\left[\frac{\partial\, l\,\Gamma \frac{y \mp b^2}{y \mp b}}{\partial \frac{y \mp b^2}{y \mp b}} - \frac{\partial\, l\,\Gamma \frac{(1-b)y}{y \mp b}}{\partial \frac{(1-b)y}{y \mp b}}\right]$$

Wir benützen die Gleichung 55*, um das Verhalten von V_a an der Berührungsstelle zu ermitteln und schreiben diese Gleichung in der Form:

---

1) Mémoires de l'Acad. Paris 1787.

$$V_a = \frac{a b \alpha}{x-a} \int\limits_0^1 \frac{t^{\frac{(1-a)x}{x-a} - 1} - t^{\frac{x-a^2}{x-a} - 1}}{1-t}\, dt,$$

in der wir, um den Werth von V_a für die Berührungsstelle zu erhalten, $x = a$ zu setzen haben. Um die dabei sich zunächst herausstellende unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ zu vermeiden sei

$$t = z^{x-a}, \text{ also } dt = (x-a)\, z^{x-a-1},$$

damit wird

$$V_a = a b \alpha \int\limits_0^1 \frac{\frac{z^{a-ax} - z^{a-a^2}}{x-a}}{1-z}\, z^{x-a-1}\, dz.$$

Gehen wir jetzt zur Grenze $x = a$ über, so besitzt noch der unter dem Integralzeichen stehende Bruch die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, die aber jetzt auf dem bekannten Wege durch Differentiation sich bestimmen lässt, indem man erhält:

$$\left[\frac{\frac{z^{a-ax} - z^{a-a^2}}{x-a}}{1-z}\right]_{x=a} = \left[\frac{\frac{-a z^{a-ax}\, lz}{x-a.}}{-z \quad lz}\right]_{x=a} = a z^{a(1-a)} = a z^{ab}.$$

Für den Berührungspunkt gilt demnach

$$V_a = a^2 b \alpha \int\limits_0^1 z^{ab-1}\, dz = a\alpha.$$

Durch einfache Buchstabenvertauschung muss für denselben Punkt auch entstehen

$$V_b = b\alpha,$$

so dass, wegen $a + b = 1$, die geforderte Gleichung

$$V_a + V_b = \alpha$$

erhalten wird.

Um ferner die Dichtheit der Elektricität im Berührungspunkte beider Kugeln zu erhalten, benützen wir die Gleichung 50, welche für den jetzigen Fall lautet

$$\varrho_a = -\frac{1}{4\pi}\left\{2\left(\frac{\partial V_a}{\partial x}\right)_{x=a} + \left(\frac{V_a}{a}\right)_{x=a}\right\},$$

oder, da $(V_a)_{x=a} = a\alpha$ eben gefunden wurde, also auch $\left(\frac{V_a}{a}\right)_{x=a} = \alpha$ ist,

$$\varrho_a = -\frac{1}{4\pi}\left\{2\left(\frac{\partial V_a}{\partial x}\right)_{x=a} + \alpha\right\}.$$

Aus dem vorigen Werthe von V_a entsteht ferner

$$2\left(\frac{\partial V_a}{\partial x}\right)_{x=a}$$

$$= 2ab\alpha\left\{\int_0^1 \frac{(1 - z^{x-a})(b z^{xb-1} - z^{x-a^2-1}) + (z^{xb-1} - z^{x-a^2-1}) z^{x-a}}{(1 - z^{x-a})^2} lz\, dz\right\}_{x=a}$$

Beachtet man, dass $b = 1 - a$, so ergiebt sich, dass für $x = a$ der Bruch unter dem Integralzeichen die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ erhält. Bestimmt man seinen Werth auf die bekannte Weise durch Differentiation nach x, so entsteht:

$$2\left(\frac{\partial V_a}{\partial x}\right)_{x=a}$$

$$= 2ab\alpha\left\{\int_0^1 \frac{b^2 z^{xb-1} - z^{x-a^2-1} + a(1+b) z^{x(1+b)-a-1}}{-2(1 - z^{x-a}) z^{x-a}} lz\, dz\right\}_{x=a}$$

Auch jetzt noch hat der Bruch unter dem Integralzeichen die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, durch eine nochmalige Differentiation nach x und folgende Substitution $x = a$, geht aber die vorige Gleichung über in

$$2\left(\frac{\partial V_a}{\partial x}\right)_{x=a}$$

$$= 2ab\alpha\int_0^1 \frac{b^3 - 1 + a(1+b)^2}{2} z^{a-a^2-1} lz\, dz = 2ab\alpha\int_0^1 \frac{ab}{2} z^{ab-1} lz\, dz;$$

demnach ist

$$2\left(\frac{\partial V_a}{\partial x}\right)_{x=a} = a^2 b^2 \alpha \int_0^1 z^{ab-1} lz\, dz = -\alpha,$$

so dass entsteht

$$\varrho_a = -\frac{1}{4\pi}\left\{-\alpha + \alpha\right\} = 0.$$

Im Berührungspunkte beider Kugeln ist also die elektrische Dichtheit Null vorhanden. (Vergl. §. 6. Cap. II am Ende.)

Nicht so einfach wie die Gleichungen 55*, 55, und 56 wird die aus 49, entstehende Form von V_a für den Grenzfall $c = a + b = 1$; es möge desswegen hier nur noch die Form Platz finden, wie sie bei dem unmittelbaren Grenzübergange entsteht, nämlich

$$57, \quad V_a = ab\alpha \left\{ \sum_0^\infty {}^n \frac{1}{\sqrt{p_n^2 r_1^2 - 2 p_n q_n a r_1 \cos\theta_1 + q_n^2 a^2}} - \sum_1^\infty {}^n \frac{1}{\sqrt{p_n'^2 r_1^2 - 2 p_n' q_n' a r_1 \cos\theta_1 + q_n'^2 a^2}} \right\},$$

wenn

$$p_n = n + b;\; q_n = n;\; p_n' = n;\; q_n' = n - 1 + a = n - b.$$

Durch einfache Vertauschung von a und b folgt weiter hieraus der Werth V_b.

Literatur:

Ausser der früheren Literatur haben wir hier besonders noch die zu berücksichtigen, welche das Problem, das wir im letzten Paragraphen dieses Capitels behandelten, zum Gegenstande hatte. Poisson hatte zuerst das Problem vollständig gelöst, in der Art, wie wir angegeben haben, seine Rechnung ist niedergelegt in zwei Mémoires der Pariser Academie vom Jahre 1811; er prüfte seine Rechnungsresultate an den von Coulomb beobachteten experimentellen Daten, die in den Annalen der Pariser Academie von den Jahren 1787 und 1788 erschienen waren. In einer umfangreichen Abhandlung arbeitete alsdann Plana (Mémoires de l'Acad. d. Scienc. Turin sér. 2 t. 7. Sur la distribution de l'électr. à la surface de 2 sphères. Tur. 1845. 4. to. 333 pages.) umfangreiche Tabellen aus, denen namentlich praktisch physikalische Zwecke zu Grunde lagen; man findet derartige Tabellen auch noch in Riess, „die Lehre von der Reibungselektricität" Bnd. 1. Eine weitere Verarbeitung der Poisson'schen Rechnung geschah durch Kirchhoff „über die Vertheilung der Elektricität auf zwei leitenden Kugeln, Crelle Journal Bnd. 59. 1861" indem in dieser Abhandlung Umgestaltungen der Poisson'schen Reihe für $f(x)$ und deren Folgerungen vorgenommen werden. Eine neue und äusserst wichtige Anschauung zur Behandlung des ganzen Problemes wurde gegeben von R. Murphy in „Elementary principles of the theories of electricity heat and molecular actions Part. I, Chapter V, pag. 93. Cambridge 1833, indem dieser Physiker zuerst die importante Theorie der successiven Influenzen zu Tage för-

derte, auf der die von uns angegebene Rechnung Thomson's fusst und die eigentlich auch der Riemann'schen Rechnung zu Grunde liegt. Eine ganz besondere Behandlung des Problemes geschah durch C. Neumann in „Allgemeine Lösung des Problemes über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von irgend zwei nicht concentrischen Kugelflächen begrenzt wird.“ Halle 1862. Ein kurzer Abriss davon ist gegeben in Crelle's Journal, Bnd. 62. Neumann legte das von Thomson in „Extraits de deux lettres addressées à M. Liouville p. W. Thomson. Liouville Journal t. XII. 1847 zuerst in die Wissenschaft eingeführte und nach Neumann „bipolar“ benannte Coordinatensystem der Rechnung zu Grunde, auf das wir in späterer Rechnung zu sprechen kommen werden. Dasselbe Coordinatensystem gebrauchte auch Betti in seinem mehrfach citirten Werke. In zwar ganz anderer, aber auf einer bestimmten physikalischen Anschauung beruhenden Weise geschah die Behandlung des Problemes durch W. Hankel in „Elektrische Untersuchungen, Abhandlungen d. K. S. Gesellschaft der Wissenschaften Bnd. 5. 1856.“ Hankel betrachtet hierbei die Elektricität als einen besonderen Schwingungszustand des Lichtäthers und seine Untersuchungen stimmen auch der Form nach überein mit den angegebenen, so lange es sich um elektrische Influenz einer leitenden Kugel durch eine elektrische nichtleitende handelt. Lobeck hat die Hankel'sche Behandlung des Problemes fortgesetzt für eine beliebige Reihe leitender Kugeln, deren Mittelpunkte in derselben Geraden gelegen sind in der „Zeitschrift für Mathem. und Physik, 3. Jahrgang 1858. Herausgegeben von Schlömilch und Witzschel.“ Wir haben die nähere Beschreibung dieser Behandlung des Problemes übergangen, da für uns die allgemeinen Bedingungen §. 1, Cap. II. ausreichten und es nicht gut ist, speciellere Forderungen, wie z. B. die einer besonderen Schwingungsbewegung des Lichtäthers der Rechnung zu Grunde zu legen, so lange man durch einfachere, direct durch das Experiment als richtig nachweisbare Hypothesen zu demselben richtigen Resultate gelangen kann.

Capitel IV.

Allgemeine Methoden, die Dichtheit der Elektricität auf einem beliebigen Systeme von Leitern zu bestimmen.

Es hat zwar A. Beer in seinem mehrfach citirten Werke einen ganz allgemeinen Weg angegeben, auf welchem man zur Lösung des vorgelegten Problemes gelangen kann, allein es verlangt jener Rechnungsgang so äusserst schwierige Rechnungen, dass er praktisch wohl kaum bei nur irgend complicirterer Form der gegebenen Leiteroberflächen betreten werden kann; in der That hat auch A. Beer selbst die Verification seiner Methode nur für die Kugel vorgeschlagen und die Influenzelektricität auf einem Ellipsoid durch einen unendlich entfernten elektrischen Punkt berechnet, bei dieser letzteren Rechnung aber hat A. Beer durch einen Kunstgriff gerade den schwierigsten Theil der Rechnung umgangen. Wir erwähnen daher hier nur kurz die Methode von Beer und wenden uns alsdann zur Reduction des vorliegenden allgemeinen Problemes auf ein specielleres einfacheres, indem wir die Theorie der Kugelfunctionen benützen, deren hauptsächlichste Sätze wir sogleich folgen lassen.

A. Beer verwendet den Lehrsatz von Green §. 4. Cap. I., indem er zunächst über die gegebenen Leiteroberflächen Elektricität mit beliebiger Dichtheit ϱ verbreitet. Es sei alsdann V^0 die Potentialfunction der gesammten gegebenen und angenommenen Elektricität, also sowohl der auf den etwa gegebenen Nichtleitern haftenden, als der auf den Leiteroberflächen beliebig angebrachten. Da sich innerhalb eines jeden Leiters, vorausgesetzt, dass keiner der Nichtleiter in einer Höhlung eines Leiters enthalten ist, keine

Elektricität vorfindet, so kann die Gleichung III, §. 4. Cap. I. angewendet werden, indem noch $\int \frac{\Delta V^0}{r} dk = 0$, man erhält also

$$V_1 = \int \frac{\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V^0}{\partial n}}{r} d\sigma - \int \frac{V^0}{4\pi}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma.$$

In dieser Gleichung, deren rechte Seite, wie die linke V_1 besagt, eine Potentialfunction ist, hat das erste Glied der rechten Seite bereits die Form der Potentialfunction einer Oberflächenladung des Leiters, deren Dichtheit $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V^0}{\partial n}$ ist. Das zweite Glied muss daher betrachtet werden können als Potentialfunction elektrischer Massen, die auf oder ausserhalb des Leiters gelegen sind. Wir setzen daher

$$\int \frac{V^0}{4\pi}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = - V^I.$$

Mit V^I kann man nun gerade so verfahren, wie vorher mit V^0, so dass entsteht

$$V_1{}^I = \int \frac{\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V^I}{\partial n}}{r} d\sigma - \int \frac{V^I}{4\pi}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma.$$

Auf diese Gleichung lässt sich dieselbe Betrachtung anwenden, wie auf die vorige, deren linke Seite V_1 war und so fort, setzen wir daher

$$\int \frac{V^I}{4\pi}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = - V^{II}$$

$$\int \frac{V^{II}}{4\pi}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = - V^{III}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot ,$$

so erhalten wir

$$V_1 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\sum_0^\nu{}_\nu \frac{\partial V^\nu}{\partial n}}{r} d\sigma.$$

Nun verläuft V^I im innern Raume des Leiters gleichförmiger als V^0, V^{II} gleichförmiger als V^I, V^{III} gleichförmiger

als V^{II} u. s. w.; hieraus folgt, dass sich V^{ν} mit wachsendem ν einer Constanten C immer mehr nähern muss, so dass wir die vorige Gleichung auch schreiben können in der Form

$$V_1 = C + \frac{1}{4\pi}\int \frac{\sum \frac{\partial V^{\nu}}{\partial n}}{r}\, d\sigma.$$

Setzen wir nun

$$\frac{1}{4\pi}\sum \frac{\partial V^{\nu}}{\partial n} = \varrho',$$

so nimmt die vorige Gleichung die Form an

$$V_1 - \int \frac{\varrho'}{r}\, d\sigma = C,$$

und zeigt somit, dass, wenn wir die Leiteroberfläche mit Elektricität von der Dichtheit ϱ' bedecken, diese Ladung zugleich mit der ursprünglich angenommenen von der Dichtheit ϱ eine Potentialfunction erzeugt, die, vermehrt um die Potentialfunction, welche von der auf den Nichtleitern haftenden Elektricität erzeugt wird, für alle Punkte innerhalb des Leiters constant, gleich C ist, also der Bedingung des elektrischen Gleichgewichtes für den betreffenden behandelten Leiter genügt.

Liegen elektrische Nichtleiter innerhalb einzelner Leiter, so gelten die vorhergehenden Betrachtungen wenigstens für den Raum, der eingeschlossen ist von der äusseren Begrenzungsfläche des Leiters und der äusseren Begrenzungsfläche der Höhlung.

Hat man nun für jeden Leiter die anzubringende elektrische Ladung von der Dichtheit ϱ' ermittelt, so ist von neuem dieselbe Rechnung vorzunehmen, indem man annimmt, dass die ursprüngliche elektrische Ladung der einzelnen Leiteroberflächen die elektrische Dichtheit $\varrho - \varrho' = \varrho''$ besitze u. s. f., bis endlich die Aenderungen, die an den Dichtheiten der Elektricität auf den Leiteroberflächen anzubringen sind, kleiner werden, als irgend eine noch so kleine gegebene Grösse δ.

Der schlimmste Uebelstand, der Beer's Methode anhaftet ist, dass so vielfach die Potentialfunction einer mit Elek-

tricität geladenen Leiteroberfläche auf sich selbst zu bestimmen ist, eine Arbeit, die ausserordentlich misslich und zeitraubend ist, weil die Entwickelung der reciproken Entfernung zweier Punkte für die gewöhnlich angewandten Coordinatensysteme verschieden ausfällt, je nachdem die Entfernung der beiden Punkte vom Coordinatenanfang grösser oder kleiner ist.

Die im Folgenden beschriebenen allgemeinen Methoden der Lösung des Problemes haben wesentlich den Zweck, diesen Uebelstand zu vermeiden, auch wenn keine anderen als die gewöhnlichen räumlichen Polarcoordinaten angewandt werden und desswegen mögen hier gleich die wichtigsten Sätze Platz finden, die für die Entwickelung der reciproken Entfernung zweier Punkte, ausgedrückt in den gewöhnlichen räumlichen Polarcoordinaten, gelten. Es sind folgende:

Entwickelt man die in gewöhnlichen räumlichen Polarcoordinaten ausgedrückte reciproke Entfernung zweier Punkte nach auf- oder absteigenden Potenzen des Radiusvectors des einen Punktes, so erhält man

$$T = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr_1 \cos\gamma + r_1^2}}$$

$$= \frac{1}{r} P^0(\cos\gamma) + \frac{r_1}{r^2} P^1(\cos\gamma) + \frac{r_1^2}{r^3} P^2(\cos\gamma) + \dots$$

$$= \sum_0^\infty {}_n \frac{r_1^n}{r^{n+1}} P^n(\cos\gamma) \text{ wenn } r_1 \leqq r.$$

Oder

$$T = \frac{1}{r_1} P^0(\cos\gamma) + \frac{r}{r_1^2} P^1(\cos\gamma) + \frac{r^2}{r_1^3} P^2(\cos\gamma) + \dots$$

$$= \sum_0^\infty {}_n \frac{r^n}{r_1^{n+1}} P^n(\cos\gamma) \text{ wenn } r_1 \geqq r.$$

Die Entwickelungscoëfficienten $P^n(\cos\gamma)$ heissen Kugelfunctionen und ihre allgemeine Form ist

$$P^n(\cos\gamma) = \frac{1.3.5.\dots 2\overline{n-1}}{1.2.3.\dots n}\Big(\cos^n\gamma - \frac{n.\overline{n-1}}{2.\overline{2n-1}} \cos^{n-2}\gamma$$

$$+ \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{2.4.\overline{2n-1}.\overline{2n-3}} \cos^{n-4}\gamma + \dots\Big),$$

so dass also

$$P^0(\cos\gamma) = 1$$
$$P^1(\cos\gamma) = \cos\gamma$$
$$P^2(\cos\gamma) = \tfrac{3}{2}(\cos^2\gamma - \tfrac{1}{3})$$
$$P^3(\cos\gamma) = \tfrac{5}{2}(\cos^3\gamma - \tfrac{3}{5}\cos\gamma)$$

. . . .

$$P^{2n}(\cos\gamma) = P^{2n}(-\cos\gamma);\ P^{2n+1}(-\cos\gamma) = -P^{2n+1}(\cos\gamma);$$
$$P^n(1) = 1.$$

Ueber die Kugelfunctionen $P^n(\cos\gamma)$ gelten nun folgende analytische Sätze. [1])

Ist durch die Längen θ und θ_1 und die Breiten φ und φ_1 der beiden Punkte ausgedrückt

$$\cos\gamma = \cos\theta\ \cos\theta_1 + \sin\theta\ \sin\theta_1\ \cos(\varphi - \varphi_1),$$

so genügt $P^n(\cos\gamma) = P^n$ der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial\left(\sin\theta\,\frac{\partial P^n}{\partial\theta}\right)}{\sin\theta\, d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 P^n}{\partial\varphi^2} + n(n+1)\,P^n = 0.$$

Es ist ferner

$$\int_0^\pi P^m(\cos\gamma)\,P^n(\cos\gamma)\,\sin\gamma\,d\gamma = \begin{cases} 0 \text{ wenn } m \gtrless n \\ \frac{2}{2n+1} \text{ wenn } m = n. \end{cases}$$

$$(n+1)\,P^{n+1} - (2n+1)\cos\gamma\,P^n + (n-1)\,P^{n-1} = 0.$$

$$\frac{\partial P^n(\cos\gamma)}{\partial\cos\gamma} = (2n-1)\,P^{n-1} + (2n-5)\,P^{n-3} + (2n-9)\,P^{n-5} + \ldots,$$

wobei die Reihe rechter Hand mit P^0 oder mit P^1 abbricht.

$$\pi P^n(\cos\gamma) = \int_0^\pi (\cos\gamma - \cos\varphi\ \sin\gamma)^n\,d\varphi = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(\cos\gamma + \cos\varphi\sin\gamma)^{n+1}}$$

$$P^n(\cos\gamma) = \frac{2}{\pi}\int_0^\gamma \frac{\cos\tfrac{1}{2}\varphi\ \cos n\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\gamma)}}\,d\varphi + \frac{2}{\pi}\int_\gamma^\pi \frac{\sin\tfrac{1}{2}\varphi\ \cos n\varphi}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\varphi)}}\,d\varphi.$$

Für $n = 0$ ist in dieser letzten Gleichung die Hälfte der rechten Seite zu nehmen.

---

1) Man vergleiche noch: Heine, E. Handbuch der Kugelfunctionen. Berlin 1861. 8. Sidler, G. Die Theorie der Kugelfunctionen. Programm der Berner Kantonschule. Bern 1861. 4.

$$P^n(\cos\gamma) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\gamma \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi \sin n\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\gamma)}}\, d\varphi + \frac{2}{\pi}\int_\gamma^\pi \frac{\cos\frac{1}{2}\varphi \sin n\varphi}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\varphi)}}\, d\varphi$$

diese Gleichung gilt nicht mehr, wenn $n = 0$.

Für $n = \infty$ wird

$$P^n(\cos\gamma) = \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin\gamma}} \cos\left(\frac{2n+1}{2}\gamma - \frac{\pi}{4}\right).$$

Es ist ferner

$$P^n(\cos\gamma) = \sum_{-n}^{+n}{}^m (-1)^m \frac{(1.3.5.\ldots \overline{2n-1})^2}{\Pi(n+m)\,\Pi(n-m)} P_m{}^n(\cos\theta) P_m{}^n(\cos\theta_1) e^{im(\varphi-\varphi_1)},$$

wobei

$$\Pi(a) = 1.2.3.4.5\ldots a;\ \Pi(0) = 1.$$

$$P_m{}^n(\cos\theta) = i^m \sin^m\theta\, \mathfrak{P}_m{}^n(\cos\theta),$$

$$\mathfrak{P}_m{}^n(\cos\theta) = \cos^{n-m}\theta - \frac{\overline{n-m}.\ \overline{n-m-1}}{2.\ \overline{2n-1}}$$

$$\cos^{n-m-2}\theta + \frac{\overline{n-m}.\ \overline{n-m-1}.\ \overline{n-m-2}.\ \overline{n-m-3}}{2.\ 4.\ \overline{2n-1}.\ \overline{2n-3}} \cos^{n-m-4}\theta + \ldots$$

und diese Reihe mit $\cos^1\theta$ oder $\cos^0\theta$ abbricht.

$$P_m{}^n(\cos\theta) = P_{-m}{}^n(\cos\theta)$$

$$P_0{}^n(\cos\theta) = \mathfrak{P}_0{}^n(\cos\theta);\ P_0{}^n(\cos\theta) = \frac{\Pi(n)}{1.3.5.\ldots \overline{2n-1}} P^n(\cos\theta).$$

$$2\pi P_m{}^n(\cos\theta) = 2^n \frac{\Pi(n+m)\,\Pi(n-m)}{\Pi(2n)} \int_0^{2\pi} (\cos\theta + i\cos\varphi\sin\theta)^n \cos m\varphi\, d\varphi$$

$$= (-1)^m \cdot \frac{\Pi(n)}{1.3.\ldots \overline{2n-1}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos m\varphi\, d\varphi}{(\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi)^{n+1}}.$$

$$\int_0^\pi P_m{}^n(\cos\theta) P_m{}^\nu(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \begin{cases} 0 \text{ wenn } \nu \gtrless n \\ (-1)^m \cdot \dfrac{2}{2n+1} \dfrac{\Pi(n+m)\,\Pi(n-m)}{(1.3.5\ldots \overline{2n-1})^2} \end{cases}$$

wenn $\nu = n$.

$$\frac{\partial \mathfrak{P}_m{}^n(\cos\theta)}{\partial \cos\theta} = (n-m)\,\mathfrak{P}_{m+1}{}^n(\cos\theta)$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{P}_m{}^n(\cos\theta)}{(\partial\cos\theta)^2} = (n-m)(n-m-1)\,\mathfrak{P}_{m+2}{}^n(\cos\theta)$$

$$(n-m-1)\, P_{m+2}^n(\cos\theta) - 2(m+1)\frac{i\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$P_{m+1}^n(\cos\theta) - (n+m+1)\, P_m^n(\cos\theta) = 0.$$

$$P_n^n(\cos\theta) = i^n \sin^n\theta$$

$$P_{n-1}^n(\cos\theta) = \cos\theta\,(i^{n-1}\sin^{n-1}\theta).$$

Jede Function zweier Variablen, $f(\theta, \psi)$ lässt sich, so lange θ zwischen den Grenzen 0 und π, ψ zwischen den Grenzen 0 und 2π enthalten ist, und die Function $f(\theta, \psi)$ innerhalb dieser Grenzen endlich bleibt, immer und nur auf eine einzige Weise in eine nach Kugelfunctionen geordnete Reihe entwickeln, nämlich in eine Reihe von der Form

$$f(\theta, \psi) = \sum_0^{\infty}{}_n \sum_{-n}^{+n}{}_\lambda\, k_\lambda^n\, P_\lambda^n(\cos\theta)\, e^{i\lambda\psi};$$

die Entwickelungscoëfficienten k_λ^n bestimmen sich dabei vermittelst der Gleichung:

$$k_\lambda^n = (-1)^\lambda \frac{(1.3.5\ldots.\overline{2n-1})^2\,(2n+1)}{\Pi(n+\lambda)\;\Pi(n-\lambda)4\pi}\int_0^\pi d\theta_1 \sin\theta_1 \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \psi_1)$$

$$P_\lambda^n(\cos\theta_1)\, e^{-i\lambda\psi_1}\, d\psi_1.$$

Ist $f(\theta, \psi)$ an einzelnen Stellen unstetig, ohne unendlich zu werden, so drückt die rechter Hand stehende Entwickelung den Mittelwerth von $f(\theta, \psi)$ an der Unstetigkeitsstelle $\theta_1\ \psi_1$ aus, d. h. den Werth

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta_1, \psi_1)\, d\psi_1,$$

ist die Function $f(\theta, \psi)$ von ψ unabhängig, so verschwinden alle k, für welche $\lambda \gtrless 0$ ist und

$$k_0^n = \frac{(1.3.5\ldots.\overline{2n-1})^2}{(\Pi(n))^2}\,\frac{2n+1}{2}\int_0^\pi P_0^n(\cos\theta_1)\, f(\theta_1)\sin\theta_1\, d\theta_1$$

$$= \frac{1.3.5\ldots.\overline{2n-1}}{\Pi(n)}\cdot\frac{2n+1}{2}\int_0^\pi P^n(\cos\theta_1)\, f(\theta_1)\sin\theta_1\, d\theta_1,$$

so dass man auch setzen kann

$$f(\theta) = \sum_0^\infty {}_n\, k_n\, P^n(\cos\theta),$$

$$k_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\theta)\, P^n(\cos\theta)\, \sin\theta\, d\theta.$$

Ist umgekehrt die Entwickelung einer Function nach Kugelfunctionen gegeben in der Form

$$S = k_0 P^0 + k_1 P^1 + k_2 P^2 + k_3 P^3 + \ldots\ldots$$

wo also die Coëfficienten k bekannte Functionen ihres Indexes n sind, so lässt sich aus einer solchen Entwickelung auch wieder $f(\theta)$ bestimmen auf folgendem Wege.

Drücken wir die Functionen P der vorgelegten Entwickelung durch die oben genannten Integrale aus, so erhalten wir:

$$\frac{\pi}{2} S = \int_0^\theta \frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\theta)}} [k_0 + k_1\cos\varphi + k_2\cos 2\varphi + k_3\cos 3\varphi + ..]\, d\varphi$$

$$+ \int_\theta^\pi \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\varphi)}} [k_0 + k_1\cos\varphi + k_2\cos 2\varphi + k_3\cos 3\varphi + ..]\, d\varphi.$$

Schreiben wir, um anzudeuten, dass die k Functionen ihres Indexes sind

$$k_n = f(n).$$

Es wird nun, indem man für n die complexe Variable $z = x + iy$ schreibt, $f(n) = f(z)$.

Dann ist nach der Theorie complexer Functionen

$$\int f(z)\, dz = 0,$$

wenn sich die Integrationscurve erstreckt über eine in sich zurücklaufende Linie, innerhalb deren $f(z)$ eine monogene, (allenthalben endliche, stetige und eindeutige) Function ist.

Ist $z = n$ ein Punkt, der von dieser Integrationscurve mit umschlossen wird, so ist

$$\int \frac{f(z)\, dz}{z - n} = 2i\pi f(n).$$

Umschliesst die Integrationscurve den negativen Theil der reellen Axe nicht mit, so ist, wenn n eine positive ganze Zahl bedeutet

$$\int \frac{f(z)\,dz}{z+n} = 0.$$

Durch Addition folgt aus den beiden letzten Gleichungen:

$$\int \frac{z}{z^2-n^2} f(z)dz = i\pi f(n)$$

folglich ist

$$f(n) = \frac{1}{\pi} \int \frac{z\,i}{n^2-z^2} f(z)\,dz$$

und

$$f(0)+f(1)\cos\varphi+f(2)\cos 2\varphi+f(3)\cos 3\varphi+\ldots.$$
$$=\frac{1}{\pi}\int\left\{\frac{1}{-z}+\frac{z\cos\varphi}{1^2-z^2}+\frac{z\cos 2\varphi}{2^2-z^2}+\frac{z\cos 3\varphi}{3^2-z^2}+\ldots\right\} if(z)\,dz.$$

Nun ist bekanntlich

$$\frac{\pi}{2}\;\frac{\cos\mu(\pi-x)}{\sin\mu\pi}=\frac{1}{2\mu}-\frac{\mu\cos x}{1^2-\mu^2}-\frac{\mu\cos 2x}{2^2-\mu^2}-\frac{\mu\cos 3x}{3^2-\mu^2}-\ldots.$$

wenn $0 \leqq x \leqq 2\pi$,

und daraus ergiebt sich

$$-\frac{1}{z}+\frac{z\cos\varphi}{1^2-z^2}+\frac{z\cos 2\varphi}{2^2-z^2}+\frac{z\cos 3\varphi}{3^2-z^2}+\ldots=-\left(\frac{1}{2z}+\frac{\pi}{2}\frac{\cos z(\pi-\varphi)}{\sin z\pi}\right),$$

und

$$f(0)+f(1)\cos\varphi+f(2)\cos 2\varphi+f(3)\cos 3\varphi+\ldots.$$
$$=-\frac{1}{2\pi}\int\left(\frac{1}{z}+\pi\;\frac{\cos z(\pi-\varphi)}{\sin z\pi}\right) if(z)dz,$$

damit endlich erhalten wir für S

$$\pi^2 S=-\int_0^{\theta}\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\theta)}}\int\left(\frac{1}{z}+\pi\;\frac{\cos z(\pi-\varphi)}{\sin z\pi}\right) if(z)\,dz$$

$$-\int_{\theta}^{\pi}\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\varphi)}}\int\left(\frac{1}{z}+\pi\;\frac{\cos z(\pi-\varphi)}{\sin z\pi}\right) if(z)\,dz, = \pi^2 f(\theta),$$

wobei die Integration im Bezug auf die complexe Variable z sich über eine solche geschlossene Curve zu erstrecken

hat, dass von ihr alle Punkte, für welche z eine ganze positive reelle Zahl ist, eingeschlossen werden und dass innerhalb der Curve die Function $f(z)$ allenthalben endlich stetig und eindeutig bleibt. Da im Allgemeinen zu erwarten ist, dass $f(z)$ oder, wenn $z = Re^{i\vartheta}$, $f(Re^{i\vartheta})$ für ein unendlich grosses R verschwindet, so kann man als einfachste Integrationscurve die imaginäre Axe und den über ihr nach der positiven reellen Axe hin errichteten Halbkreis von unendlich grossem Radius wählen. Auf letzterem verschwindet nun im allgemeinen das nach z zu nehmende Integral, so dass als Integrationsweg allein die imaginäre Axe übrig bleibt.

§. 1.

Reduction des allgemeinen elektrostatischen Problemes auf ein bestimmtes einfaches.

Das Problem, mit dessen Reduction wir es in diesem Paragraphen zu thun haben, kann in folgender Weise ausgesprochen werden: „Gegeben ist eine beliebige Anzahl von Leitern und Nichtleitern für Elektricität in beliebiger Lage gegen einander; es ist bekannt, in welcher Weise die Elektricität in den Nichtleitern vertheilt ist, und es soll bestimmt werden, in welcher Weise sich die Elektricität über die Leiter vertheilt, wenn Gleichgewicht zwischen den gegenseitigen elektrischen Wirkungen eingetreten ist, und wenn zugleich die Elektricitätsmengen bekannt sind, die den einzelnen Leitern direct mitgetheilt wurden.

Was nun die Form der einzelnen gegebenen Leiterflächen anlangt, so setzen wir von ihnen vor der Hand voraus, dass sie keine scharfen Spitzen oder Kanten besitzen und dass sich innerhalb eines jeden einzelnen Leiters ein Punkt finden lasse derart, dass wenn man ihn zum Anfang eines gewöhnlichen räumlichen Polarcoordinatensystems wählt, zu jedem Punkt der Oberfläche des Leiters ein bestimmter von Null verschiedener Radiusvector gehöre, oder mit andern Worten, dass der Radiusvector die Leiteroberfläche in nur einem

einzigen Punkte treffe, nirgends berühre. Sollten die gemachten Voraussetzungen in Wirklichkeit nicht erfüllt sein, so wird weiter unten angegeben, wie man auch dann noch zur Lösung des vorgelegten Problemes gelangen kann.

Die Anzahl der gegebenen Leiter, die sämmtlich den eben gemachten Voraussetzungen genügen, sei q und s sei die Nummer irgend eines dieser Leiter; dann haben wir auch q verschiedene räumliche Polarcoordinatensysteme, deren Breiten sämmtlich durch θ, deren Längen sämmtlich durch φ bezeichnet werden mögen, jedoch so, dass ein links an θ und φ angehängter Index die Nummer des Coordinatensystemes bezeichnet, dem θ und φ angehört, ein rechts angehängter Index bezeichne die Nummer des Leiters, dem der Punkt mit den Coordinaten θ und φ angehört. Analog verfahren wir mit der Bezeichnung des Radiusvectors r, so dass z. B. irgend ein Punkt der Oberfläche des p^{ten} Leiters im Bezug auf das Coordinatensystem, dessen Pol im s^{ten} Leiter gelegen ist, die Coordinaten besitzt ${}_sr_p$, ${}_s\theta_p$, ${}_s\varphi_p$. Aus der bekannten gegenseitigen Lage der Leiter ist es auf gewöhnliche Weise möglich, die einzelnen Coordinaten mit verschiedenen linken Indices in einander umzurechnen und durch einander darzustellen.

Ist ϱ_s die Dichtheit der Elektricität auf dem s^{ten} Leiter nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes, so gelten für ϱ_s die allgemeinen Betrachtungen, die in Cap. II. §. 3. und folgenden angestellt wurden und von denen wir hier nur so viel hervorheben, dass ϱ_s eine für alle Punkte des s^{ten} Leiters stetig verlaufende, nirgends unendlich werdende Function ist. Wir können dann ϱ_s nach Kugelfunctionen entwickelt denken, und es sei

$$1, \quad \varrho_s = \sum_0^\infty{}_n \sum_{-n}^{+n}{}_\lambda \; {}^nk_s^\lambda \; P_\lambda^n(\cos {}_s\theta_s)\, e^{i\lambda\, {}_s\varphi_s},$$

wenn das s^{te} Coordinatensystem der Rechnung zu Grunde gelegt wird; wobei natürlich auf der rechten Seite der Gleichung 1, nur der reelle Theil für uns von Bedeutung ist. Bezieht man ϱ_s auf ein anderes, etwa das p^{te} Coordinatensystem, so hat man zu schreiben:

$$\varrho_s = \sum_{0}^{\infty}{}_n \sum_{-n}^{+n}{}_\lambda \, {}^n k_s^\lambda \, P_\lambda^n (\cos {}_p\vartheta_s) \, e^{i \lambda {}_p\varphi_s}.$$

Um nun ϱ_s selbst zu bestimmen, wenden wir den Satz 4. in §. 4, Cap. II. an, dass die Potentialfunction aller vorhandenen Elektricität, wenn diese sich auf den Leitern im Zustande des Gleichgewichtes befinden soll, innerhalb endlicher Räume im Innern der einzelnen Leiter denselben constanten Werth aufweisen muss, der aber von Leiter zu Leiter verschieden sein kann.

Sind ${}_p r_s$, ${}_p\vartheta_s$ und ${}_p\varphi_s$ die Coordinaten eines Oberflächenpunktes des s^{ten} Leiters in Bezug auf das p^{te} Coordinatensystem, so besitzt eine Kugelfläche mit dem Radius ${}_p r_s$ in jenem Punkte das Oberflächenelement:

$$ds = {}_p r_s^2 \sin {}_p\vartheta_s \, d_p\vartheta_s \, d_p\varphi_s.$$

Ist ∂w das in jenem Punkte auf dem daselbst gelegenen Oberflächenelement db des s^{ten} Leiters errichtete Normalenelement, das mit $\partial_p r_s$ einen spitzen Winkel bildet, so ist

$$db \frac{\partial_p r_s}{\partial w} = ds$$

folglich

$$2, \quad db = \frac{{}_p r_s^2}{\frac{\partial_p r_s}{\partial w}} \sin {}_p\vartheta_s \, d_p\vartheta_s \, d_p\varphi_s.$$

Irgend ein Punkt im Innern des p^{ten} Leiters sei vom Pol des p^{ten} Coordinatensystems um a_p entfernt und sein Fahrstrahl bilde mit dem des Oberflächenelementes db den Winkel ${}_p\gamma_s$, dann ist die Entfernung dieses Punktes vom Oberflächenelement db

$$3, \quad r = \sqrt{{}_p r_s^2 + a_p^2 - 2_p r_s a_p \cos {}_p\gamma_s}.$$

Die Potentialfunction der auf dem s^{ten} Leiter haftenden Elektricität auf den im p^{ten} Leiter angenommenen Punkt ist somit

$$\sum_{0}^{\infty}{}_n \sum_{-n}^{+n}{}_\lambda \, {}^n k_s^\lambda \int_{{}_p\vartheta_s'}^{{}_p\vartheta_s''} \sin_p\vartheta_s d_p\vartheta_s \int_{{}_p\varphi_s'}^{{}_p\varphi_s''} \frac{{}_p r_s^2 \, P_\lambda^n (\cos_p \vartheta_s) e^{i \lambda {}_p\varphi_s} d_p\varphi_s}{\frac{\partial_p r_s}{\partial w} \sqrt{{}_p r_s^2 + a_p^2 - 2_p r_s a_p \cos_p\gamma_s}},$$

wenn die Integrationsgrenzen ${}_p\vartheta_s'$, ${}_p\vartheta_s''$, ${}_p\varphi_s'$, ${}_p\varphi_s''$ so gewählt sind, dass sich die Integration über die ganze Oberfläche des s^{ten} Leiters erstreckt; für $p = s$ ist demnach

$$
\begin{aligned}
{}_s\varphi_s' &= {}_p\varphi_p' = 0; \; {}_s\varphi_s'' = {}_p\varphi_p'' = 2\pi. \\
{}_s\vartheta_s' &= {}_p\vartheta_p' = 0; \; {}_s\vartheta_s'' = {}_p\vartheta_p'' = \pi.
\end{aligned}
$$

Nehmen wir von vorstehendem Werthe der Potentialfunction noch die Summe im Bezug auf s von 1 bis q, so stellt der neue dadurch erscheinende Ausdruck die Potentialfunction dar, die von der gesammten auf den Leitern haftenden Elektricität erzeugt wird.

Ist ferner $d\mu$ ein Massenelement der auf den Nichtleitern haftenden Elektricität und gehört zu $d\mu$ der Radiusvector ${}_p\varrho$, indem er mit dem Radiusvector a_p den Winkel γ_p einschliesst, so erhält man für die Potentialfunction U der auf den Nichtleitern haftenden Elektricität auf den Punkt mit dem Radiusvector a_p:

$$
U = \int \frac{d\mu}{\sqrt{{}_p\varrho^2 + a_p^2 - 2\,{}_p\varrho\, a_p \cos\gamma_p}},
$$

wenn die Integration erstreckt wird über alle auf den Nichtleitern haftenden Elektricität.

Die Gesammtpotentialfunction aller überhaupt vorhandenen Elektricität auf den im p^{ten} Leiter angenommenen Punkt mit dem Radiusvector a_p ist demnach

$$
\int \frac{d\mu}{\sqrt{{}_p\varrho^2 + a_p^2 - 2\,{}_p\varrho\, a_p \cos\gamma_p}} + \sum_1^q{}_s \sum_0^\infty{}_n \sum_{-n}^{+n}{}_\lambda \, {}^n k_s^\lambda \int_{{}_p\vartheta_s'}^{{}_p\vartheta_s''} \sin{}_p\theta_s \, d_p\theta_s \times
$$

$$
\int_{{}_p\varphi_s'}^{{}_p\varphi_s''} \frac{{}_pr_s^{\,2} P_\lambda^n(\cos{}_p\theta_s) e^{i\lambda{}_p\varphi_s} d\,{}_p\varphi_s}{\frac{\partial_p r_s}{\partial w} \sqrt{{}_pr_s^{\,2} + a_p^2 - 2\,{}_pr_s\, a_p \cos{}_p\gamma_s}}.
$$

In diesem Ausdrucke sind nun die ${}^n k_s^\lambda$ noch unbekannte Coëfficienten einer Entwickelung nach Kugelfunctionen, die wir zu bestimmen haben aus der Bedingung, dass es in jedem einzelnen Leiter einen endlich grossen Raum geben muss, innerhalb dessen der vorstehende Ausdruck für alle Punkte constant ist. Wir stellen diese Bedingung zunächst

auf für alle Punkte, welche auf einer mit dem Radius a_p um den Pol des p^{ten} Leiters beschriebenen Kugel liegen, vorausgesetzt, dass man a_p so klein gewählt habe, dass diese Kugelfläche noch ganz innerhalb des p^{ten} Leiters enthalten sei (nirgends über die Oberfläche desselben hervorrage).

Ist nun $a_p\, \vartheta_p\, \varphi_p$ ein Punkt dieser Kugelfläche und α_p der constante Werth, den die Potentialfunction aller vorhandenen Elektricität auf alle Punkte der Kugelfläche haben soll, so muss die Gleichung, die man erhält, wenn man den vorstehenden Ausdruck gleich α_p setzt, bestehen bleiben, welchen Werth auf der linken Seite auch ϑ_p und φ_p haben möge.

Diese Bedingung können wir dadurch erfüllen, dass wir beide Seiten der entstehenden Gleichung nach Kugelfunctionen entwickeln und die sich entsprechenden Entwickelungscoëfficienten einander gleich setzen. Da eine solche Entwickelung, wie wir wissen, nur auf eine einzige Weise möglich ist, so folgt, dass die entstehenden Gleichungen lineare sein müssen. Bilden wir den Coëfficienten von $P_v^u(\cos\vartheta_p)\, e^{iv\varphi_p}$, so erhalten wir auf der linken Seite:

$$(-1)^v \frac{(1.3.5.\ldots.\overline{2u-1})^2}{\Pi(u+v)\,\Pi(u-v)} \cdot \frac{2u+1}{4\pi} \Bigg\{ \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} \Bigg[\int \frac{d\mu}{\sqrt{{}_p\varrho^2 + a_p^2 - 2\,{}_p\varrho\, a_p \cos\gamma_p}}$$

$$+ \sum_1^{q}{}_s \sum_0^{\infty}{}_n \sum_{-n}^{+n}{}_\lambda\; {}^n k_s^\lambda \int_{{}_p\vartheta_s'}^{{}_p\vartheta_s''} \sin{}_p\theta_s\, d_p\theta_s$$

$$\int_{{}_p\varphi_s'}^{{}_p\varphi_s''} \frac{{}_pr_s^2\, P_\lambda^n(\cos{}_p\theta_s)\, e^{i\lambda\,{}_p\varphi_s}\, d_p\varphi_s}{\frac{\partial_p r_s}{\partial w} \cdot \sqrt{{}_pr_s^2 + a_p^2 - 2\,{}_pr_s\, a_p \cos{}_p\gamma_s}} \Bigg] P_v^u(\cos\theta)\, e^{-iv\varphi}\, d\varphi \Bigg\},$$

wenn man in dem Werthe von ${}_p\gamma_s$ statt ϑ_p und φ_p schreibt resp. ϑ und φ.

Auf der rechten Seite erscheint allein der Coëfficient von $P_0^0(\cos\vartheta_p)\, e^{i0\varphi_p}$, während sämmtliche andere Coëfficienten verschwinden. Dieser einzige nicht verschwindende Coëfficient ist aber

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} \alpha_p\, d\varphi = \frac{\alpha_p}{2}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta = \alpha_p.$$

Setzen wir nun die gefundenen Coëfficienten respective einander gleich, so entsteht ein System unendlich vieler linearer Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten ${}^nk_s^\lambda$. Es kommt zunächst darauf an, dieses System von Gleichungen möglichst zu vereinfachen: da sämmtliche Coëfficienten der rechten Seite mit Ausnahme des nullten verschwinden, so ändert sich die Richtigkeit des entstehenden Systemes unendlich vieler linearer Gleichungen nicht, wenn wir linker Hand den gemeinschaftlichen Factor

$$(-1)^v \frac{(1.\,3.\,5.\ldots.\,2\overline{u-1})^2}{\Pi(u+v)\,\Pi(u-v)}$$

ohne weiteres weglassen, da derselbe für $u = v = 0$ in 1 überzugehen hat.

In dem so vereinfachten Coëfficienten der linken Seite führen wir nun die Entwickelungen ein

$$\frac{1}{\sqrt{{}_p\varrho^2 + a_p^2 - 2\,{}_p\varrho\, a_p \cos\gamma_p}} = \sum_0^\infty{}_m \frac{a_p^m}{{}_p\varrho^{m+1}} P^m(\cos\gamma_p),$$

$$\frac{1}{\sqrt{{}_pr_s^2 + a_p^2 - 2\,{}_pr_s\, a_p \cos {}_p\gamma_s}} = \sum_0^\infty{}_m \frac{a_p^m}{{}_pr_s^{m+1}} P^m(\cos {}_p\gamma_s),$$

welche erlaubt sind, da in unserem Falle immer

$$a_p < {}_p\varrho \text{ und } a_p < {}_pr_s \text{ ist,}$$

welchen Werth auch p oder s habe.

Ferner ist

$$P^m(\cos {}_p\gamma_s) =$$

$$\sum_{-m}^{+m}{}_\mu (-1)^\mu \frac{(1.\,3.\ldots.\,2\overline{m-1})^2}{\Pi(m+\mu)\,\Pi(m-\mu)} P_\mu^m(\cos\vartheta_p) P_\mu^m(\cos {}_p\theta_s) e^{i\mu({}_p\varphi_s - \varphi_p)}$$

$$P^m(\cos\gamma_p) =$$

$$\sum_{-m}^{+m}{}_\mu (-1)^\mu \frac{(1.\,3.\ldots.\,2\overline{m-1})^2}{\Pi(m+\mu)\,\Pi(m-\mu)} P_\mu^m(\cos\vartheta_p) P_\mu^m(\cos {}_p\theta) e^{i\mu({}_p\varphi - \varphi_p)},$$

wenn in dieser letzteren Gleichung ${}_p\theta$ und ${}_p\varphi$ Breite und

Länge desjenigen Punktes des Nichtleiters bedeutet, dem der Radiusvector ${}_p\varrho$ zugehört.

Setzen wir diese Entwickelungen ein in den obigen Werth des Coëfficienten von $P_v^u(\cos\vartheta_p)e^{iv\varphi_p}$, indem wir statt ϑ_p und φ_p θ und φ schreiben, so lauten die nach diesen beiden Variablen zu nehmenden Integrationen:

$$\int_0^\pi P_v^u(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\sum_0^\infty{}_m\sum_{-m}^{+m}{}_\mu(-1)^\mu\frac{(1.3.\ldots.\overline{2m-1})^2}{\Pi(m+\mu)\Pi(m-\mu)}P_\mu^m(\cos\theta)\,e^{i(v-\mu)\varphi}\,d\varphi.$$

Nun ist für die nach φ zu nehmende Integration:

$$\int_0^{2\pi}e^{i(v-\mu)\varphi}d\varphi=\begin{cases}2\pi & \text{wenn } v=\mu\\ 0 & \text{,, } v\gtrless\mu.\end{cases}$$

Das vorstehende Doppelintegral vereinfacht sich demnach zu

$$2\pi\sum_0^\infty{}_m(-1)^v\frac{(1.3.\ldots.\overline{2m-1})^2}{\Pi(m+v)\Pi(m-v)}\int_0^\pi P_v^u(\cos\theta)P_v^m(\cos\theta)\sin\theta d\theta,$$

und es kann v nur Werthe annehmen, die zwischen $-m$ und $+m$ liegen, beide ganzen Zahlen mit eingeschlossen.

Es ist aber auch weiter

$$\int_0^\pi P_v^u(\cos\theta)P_v^m(\cos\theta)\sin\theta d\theta=$$

$$\begin{cases}(-1)^v\dfrac{2}{2u+1}\dfrac{\Pi(u+v)\Pi(u-v)}{(1.3.5.\ldots.\overline{2u-1})^2} & \text{wenn } u=m\\ 0 & \text{,, } u\gtrless m.\end{cases}$$

Die vorige Summe enthält daher das einzige nicht verschwindende Glied

$$\frac{4\pi}{2u+1}.$$

Setzen wir die Ergebnisse dieser Integration ein in den obigen Ausdruck für den Coëfficienten $P_v^u(\cos\vartheta_p)e^{iv\varphi_p}$, so entsteht die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{c}0\\ v,u\\ \infty\end{array}\right| {}^u{}_pU^v\, a_p{}^u + \sum_1^q{}_s \sum_0^\infty{}_n \sum_{-n}^{+n}{}_\lambda\; {}^nk_s{}^\lambda\, a_p{}^u$$

$$\text{I,}\qquad \int_{{}_p\vartheta_s{}'}^{{}_p\vartheta_s{}''} P_v{}^u(\cos{}_p\theta_s)\, P_\lambda{}^n(\cos{}_p\theta_s)\,\sin{}_p\theta_s\, d_p\theta_s$$

$$\times \int_{{}_p\varphi_s{}'}^{{}_p\varphi_s{}''} \frac{e^{i(\lambda+v)\,{}_p\varphi_s}}{{}_pr_s{}^{u-1}\,\frac{\partial_p r_s}{\partial w}}\, d\,{}_p\varphi_s = \left\{\begin{array}{ll} \alpha_p & \text{wenn } u = 0 = v \\ 0 & \quad ,, \quad u > 0 \end{array}\right|$$

wenn zur Abkürzung

$${}^u{}_pU^v = \int \frac{d\mu}{{}_p\varrho^{u+1}}$$

gesetzt wurde, während das Zeichen $\left.\begin{array}{c}0\\ v,u\\ \infty\end{array}\right|$ vor der linken Seite und | hinter der rechten Seite der Gleichung andeuten soll, dass die vorstehende Gleichung alle die Gleichungen repräsentirt, die man erhält, wenn man dem u alle ganzzahligen Werthe von 0 bis ∞ und für jedes bestimmte u dem v alle ganzzahligen Werthe von $-u$ bis $+u$ ertheilt.

Das System Gleichungen I, drückt die Bedingung dafür aus, dass im Falle des elektrischen Gleichgewichtes die Potentialfunction aller vorhandenen Elektricität auf alle Punkte der Kugelfläche, die mit dem Radius a_p um den Pol des p^{ten} Leiters beschrieben ist, denselben constanten Werth α_p aufweise.

Die linke Seite der u, v^{ten} Gleichung dieses Systemes besitzt aber den gemeinschaftlichen Factor $a_p{}^u$, während die rechten Seiten mit Ausnahme der Gleichung, für welche $u = v = 0$, sämmtlich verschwinden. Es ändert sich daher die Richtigkeit unseres Systemes unendlich vieler linearer Gleichungen nicht, wenn wir auf den linken Seiten den gemeinschaftlichen Factor $a_p{}^u$ ohne weiteres weglassen. Dann aber ist zugleich auch die Bedingung des elektrischen Gleichgewichtes erfüllt nicht bloss für die Kugelfläche mit dem Radius a_p, sondern für den ganzen von dieser Kugelfläche umschlossenen Raum, und das System I, drückt nach der an die Spitze dieser Betrachtung gestellten Bedingung für

das elektrische Gleichgewicht alles aus, was zum Eintreten des elektrischen Gleichgewichtes im p^{ten} Leiter nöthig ist. Stellen wir nun noch für jeden der gegebenen Leiter ein System Gleichungen auf wie das I, für den p^{ten} Leiter gültige, so drücken die vorhandenen q Systeme mit je unendlich vielen linearen Gleichungen und ebensoviel Unbekannten ${}^nk_s^\lambda$ vollständig die Bedingung des elektrischen Gleichgewichtes aus. Wir repräsentiren diese Bedingung, indem wir schreiben

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{r,u}\; {}^u_pU^r + \sum_1^q{}_s \sum_0^\infty{}_n \sum_{-n}^{+n}{}_\lambda\; {}^nk_s^\lambda$$

$$\int\limits_{{}_p\vartheta_s'}^{{}_p\vartheta_s''} P_\lambda{}^n(\cos{}_p\theta_s)\, P_v{}^u(\cos{}_p\theta_s)\sin{}_p\theta_s\, d_p\theta_s \int\limits_{{}_p\varphi_s'}^{{}_p\varphi_s''} \frac{e^{i(\lambda+v)\,{}_p\varphi_s}}{{}_pr_s{}^{u-1}\,\frac{\partial_p r_s}{\partial w}}\, d_p\varphi_s$$

$$\text{II,} \qquad = \begin{cases} \alpha_p & \text{wenn } u = 0 \\ 0 & \;\;,, \quad\; u > 0 \end{cases}$$

Das System Gleichungen II, lässt sich nun noch bedeutend reduciren. Es sei dazu allgemein

$$4, \qquad {}^nk_s^\lambda = {}^n{}_0k_s^\lambda + {}^n{}_1k_s^\lambda + {}^n{}_2k_s^\lambda + \cdots\cdots$$

und ${}^n{}_0k_s^\lambda$ möge Das bedeuten, was aus ${}^nk_s^\lambda$ wird, wenn alle Elektricität, die sich auf den Nichtleitern und auf den Leitern mit Ausnahme des s^{ten} befindet, plötzlich in unendliche Entfernung fortrückte, ohne dass sich der Werth von α_s änderte, oder, mit andern Worten, es soll

$$\sum_0^\infty{}_n \sum_{-n}^{+n}{}_\lambda\; {}^n{}_0k_s^\lambda\, P_\lambda{}^n(\cos{}_s\theta_s)\, e^{i\lambda\,{}_s\varphi_s}$$

die Dichtheit darstellen, mit der die Elektricität auf dem s^{ten} Leiter so vertheilt ist, dass sie in dessen innerem Raume allenthalben die constante Potentialfunction α_s bewirkt. Benützen wir das System II, zur Berechnung der ${}^n{}_0k_p^\lambda$, so sind linker Hand alle die Glieder zu vernachlässigen, welche sich auf andere elektrische Massen als die auf dem p^{ten} Leiter haftenden beziehen; es ist also

$$\text{III,}\quad \left.\begin{array}{c}0\\ v,u\\ \infty\end{array}\right|\sum_0^\infty{}_n\sum_{-n}^{+n}{}_\lambda\, {}^n{}_0k_p{}^\lambda\int_0^\pi P_\lambda{}^n(\cos{}_p\theta_p)\,P_v{}^u(\cos{}_p\theta_p)\sin{}_p\theta_p\,d_p\theta_p\,.$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{e\,i(\lambda+v)\,{}_p\varphi_p}{{}_pr_p{}^{u-1}\,\frac{\partial_p r_p}{\partial w}}\,d_p\varphi_p=\left\{\begin{matrix}\alpha_p & \text{wenn } u=0\\ 0 & \text{,,}\quad u>0\end{matrix}\right|.$$

Indem wir dem p alle ganzzahligen Werthe von 1 bis q beilegen, stellen wir für jeden Leiter ein solches System Gleichungen auf, wie III, für den p^{ten} Leiter. Wir denken uns nun aus diesen q Systemen die ${}^n{}_0k_p{}^\lambda$ berechnet für jedes p, λ, und n und bilden alsdann das neue System Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{c}0\\ v,u\\ \infty\end{array}\right|\sum_0^\infty{}_n\sum_{-n}^{+n}{}_\lambda\, {}^n{}_1k_p{}^\lambda\int_0^\pi P_\lambda{}^n(\cos{}_p\theta_p)\,P_v{}^u(\cos{}_p\theta_p)\sin{}_p\theta_p\,d_p\theta_p$$

$$\text{IV,}\quad \int_0^{2\pi}\frac{e\,i(\lambda+v)\,{}_p\varphi_p}{{}_pr_p{}^{u-1}\,\frac{\partial_p r_p}{\partial w}}\,d_p\,\varphi_p=-\,{}^uU_p{}^v-\sum_{1\,p+1}^{p-1\,q}{}_s\sum_0^\infty{}_n\sum_{-n}^{+n}{}_\lambda\,{}^n{}_0k_s{}^\lambda\,.$$

$$\int_{{}_p\vartheta_s{}'}^{{}_p\vartheta_s{}''}P_\lambda{}^n(\cos{}_p\theta_s)\,P_v{}^u(\cos{}_p\theta_s)\sin{}_p\theta_s d_p\theta_s\int_{{}_p\varphi_s{}'}^{{}_p\varphi_s{}''}\frac{e\,i(\lambda+v)\,{}_p\varphi_s}{{}_pr_s{}^{u-1}\,\frac{\partial_p r_s}{\partial w}}\,d_p\varphi_s.\Bigg|$$

Ein solches System, wie das IV, in welchem die rechten Seiten vollständig bekannt sind, stellen wir für jeden Leiter auf und berechnen daraus ${}^n{}_1k_p{}^\lambda$ für jedes p, λ und n. Wir stellen nun das neue System auf:

$$\left.\begin{array}{c}0\\ v,u\\ \infty\end{array}\right|\sum_0^\infty{}_n\sum_{-n}^{+n}{}_\lambda\, {}^n{}_2k_p{}^\lambda\int_0^\pi P_\lambda{}^n(\cos{}_p\theta_p)\,P_v{}^u(\cos{}_p\theta_p)\sin{}_p\theta_p\,d_p\theta_p$$

$$\text{V,}\quad \int_0^{2\pi}\frac{e\,i(\lambda+v)\,{}_p\varphi_p}{{}_pr_p{}^{u-1}\,\frac{\partial_p r_p}{\partial w}}\,d_p\,\varphi_p=-\sum_{1\,p+1}^{p-1\,q}{}_s\sum_0^\infty{}_n\sum_{-n}^{+n}{}_\lambda\,{}^n{}_1k_s{}^\lambda$$

$$\int_{d\,\vartheta_s{}'}^{{}_p\vartheta_s{}''}P_\lambda{}^n(\cos{}_p\theta_s)\,P_v{}^u(\cos{}_p\theta_s)\sin{}_p\theta_s\,d_p\,\theta_s\int_{{}_p\varphi_s{}'}^{{}_p\varphi_s{}''}\frac{e\,i(\lambda+v)\,{}_p\varphi_s}{{}_pr_s{}^{u-1}\,\frac{\partial_p r_s}{\partial w}}\,d_p\,\varphi_s\Bigg|$$

und berechnen aus ihm die ${}^{n}{}_{2}k_{p}{}^{\lambda}$ für jedes p, λ und n. Das nächste Gleichungensystem, welches die Werthe von ${}^{n}{}_{3}k_{p}{}^{\lambda}$ für jedes p, λ und n liefern würde, geht aus dem V, einfach dadurch hervor, dass man linker Hand ${}^{n}{}_{3}k_{p}{}^{\lambda}$ statt ${}^{n}{}_{2}k_{p}{}^{\lambda}$ setzt und rechter Hand ${}^{n}{}_{2}k_{s}{}^{\lambda}$ statt ${}^{n}{}_{1}k_{s}{}^{\lambda}$. Fährt man in dieser Weise fort, so erhält man den Werth von ${}^{n}{}_{r}k_{p}{}^{\lambda}$ für jedes p, λ, n und r.

Bringt man in den Systemen IV, V, u. s. w. die rechten Seiten der einzelnen Gleichungen auf die linken und addirt die sämmtlichen Gleichungen mit demselben v, u zu der entsprechenden des Systemes III, so findet man bei Beachtung der Gleichung 4, dass das System II, erscheint. Ist daher die Annahme 4, gestattet, so ist das vorgelegte Problem auf die Auflösung der Gleichungensysteme III, IV, V u. s. w. reducirt; wir müssen daher jetzt erst die Bedeutung und Gültigkeit der Gleichung 4, untersuchen.

Nach dem angegebenen einzuschlagenden Gange der Rechnung finden wir unendlich viele Werthe für die ${}^{n}{}_{r}k_{p}{}^{\lambda}$ mit demselben p, λ und n; soll also die Annahme 4, gestattet sein, so muss die rechter Hand stehende unendliche Reihe der k convergiren.

Nach der oben gegebenen Bedeutung von ${}^{n}{}_{0}k_{s}{}^{\lambda}$ für ein beliebiges s, λ und n müssen diese Werthe immer endlich sein. Bringt man in dem System IV, die rechten Seiten mit auf die linke, so erkennt man leicht, dass es diejenigen ${}^{n}{}_{1}k_{p}{}^{\lambda}$ (mit beliebigem p, λ und n) kennen lehrt, die eingesetzt in die Entwickelung

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{n} \sum_{-n}^{+n}{}_{\lambda}\, {}^{n}{}_{1}k_{p}{}^{\lambda}\, P_{\lambda}{}^{n}(\cos{}_{p}\theta_{p}) e^{i\lambda_{p}\varphi_{p}}$$

diejenige Vertheilung von Elektricität geben, welche bezüglich mit der bereits berechneten, auf den übrigen Leitern haftenden und mit der auf den Nichtleitern vorhandenen für alle Punkte des p^{ten} Leiters eine Potentialfunction gleich Null erzeugt. Es ist also mit kurzen Worten die Influenzelektricität, die auf dem p^{ten} Leiter erzeugt würde, wenn dieser abgeleitet wäre und die übrigen Leiter, ohne ihren bereits berechneten elektrischen Zustand zu ändern, in Nichtleiter übergingen. Aus den Betrachtungen des §. 6.

Cap. II. ergiebt sich nun, dass diese Influenzelektricitäten die einzelnen Leiteroberflächen mit durchaus endlicher und stetiger Dichtheit überdecken, es müssen daher auch die k als Coëfficienten der Entwickelung einer Function, die durch ihren Werth die Dichtheit der Influenzelektricität darstellt, nach Kugelfunctionen durchaus endliche Werthe haben und die Coëfficientenreihe ${}^{n}{}_{0}k_s^\lambda + {}^{n}{}_{1}k_s^\lambda + {}^{n}{}_{2}k_s^\lambda + {}^{n}{}_{3}k_s^\lambda + \cdots\cdots$ muss noch stärker convergiren als eine geometrische Reihe, selbst wenn einzelne der Leiter isolirt von anderen Leitern umschlossen werden. Ein Zweifel könnte nur noch bestehen, wenn einzelne der Leiter einander in Punkten, Linien oder Flächen berühren, doch weiss man für diesen Fall ebenfalls aus §. 6. Cap. II., dass sich im Gleichgewichtszustande auf den Berührungsstücken gar keine Elektricität vorfindet, dass man also auch diese Berührungsstücke wie gar nicht vorhanden betrachten kann, da auch der Werth der Gesammtpotentialfunction in allen Punkten der sich berührenden Leiter einer und derselbe sein muss.

Hiermit ist erwiesen, dass die Annahme 4, vollständig gerechtfertigt ist und dass demnach die Lösung des allgemeinen elektrostatischen Problemes reducirt ist auf die Auflösung der unendlich vielen Systeme unendlich vieler linearer Gleichungen III, IV, V, u. s. w. In diesen verschiedenen Systemen lauten aber die linken Seiten durchgängig identisch und auch die rechten Seiten besitzen Formen, die sich immer wiederholen. Hat man daher nur die rechten Seiten für eines dieser Systeme und für jeden Leiter berechnet, so erfordert die Bestimmung der rechten Seiten in den neu erscheinenden Gleichungensystemen nur noch eine Multiplication zweier bereits ausgewertheter Grössen. Da ferner, wie man weiss, die rechten Seiten eines Systemes auch unendlich vieler linearer Gleichungen wie IV, oder V, bei der Auflösung des Systemes nur als Factoren auftreten, die in gewisse aus den Coëfficienten der Unbekannten in unveränderlicher Weise zusammengesetzte Functionen zu multipliciren sind, so folgt, dass, wenn man nur eines der Systeme IV, oder V, aufgelöst hat, damit auch die Auflösung aller anderen Systeme, die sonst etwa noch aufzustellen sein würden, als geschehen betrachtet werden kann.

Sollten die am Anfange dieses Paragraphen über die Form der Leiter gemachten Voraussetzungen nicht erfüllt sein, sollten sich also an den Leitern scharfe Spitzen und Kanten vorfinden, so ersetzen wir zunächst die Flächenstücke, auf denen sich scharfe Spitzen und Kanten vorfinden, durch solche mit endlicher Krümmung, und gehen dann auf bekannte Weise zur Grenze der unendlich grossen Krümmung über. Ein solcher Grenzübergang braucht bei der Auflösung der verschiedenen Systeme unendlich vieler linearer Gleichungen nur bei dem einen fundamentalen, z. B. von der Form III, gemacht zu werden.

Haben ferner die Leiteroberflächen solche Formen, dass man in ihnen nicht ein räumliches Polarcoordinatensystem von der vorausgesetzten Art annehmen kann, wie z. B. wenn die Leiteroberfläche eine Ringfläche wäre, so kann man immer durch zweckmässig gelegte Schnittflächen den Leiter so in einzelne sich berührende Partialleiter zerlegen, dass nun in jedem einzelnen Partialleiter ein räumliches Polarcoordinatensystem von der vorausgesetzten Art angenommen werden kann.

Somit haben wir gesehen, dass die Bestimmung der Dichtheit, mit welcher sich Elektricität über ein beliebig gegebenes System von q Leitern verbreitet, zurückkommt auf die Auflösung von q Systemen unendlich vieler Gleichungen von der Form:

$$\text{VI,}\qquad {}_{v,u}\Big|_{\infty}^{0} \sum_{0}^{\infty}{}_n \sum_{-n}^{+n}{}_\lambda \; {}^n{}_r k_p{}^\lambda \int_0^\pi P_\lambda{}^n(\cos\theta)\, P_v{}^u(\cos\theta)\sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} \frac{e^{\,i(\lambda+v)\varphi}}{r^{u-1}\dfrac{\partial r}{\partial w}}\, d\varphi = {}_v\psi_u \Big| ,$$

in welchem die Unbekannten vertreten werden durch die ${}^n{}_r k_p{}^\lambda$. Wollen wir der in der Auflösung dieses Systemes linearer Gleichungen enthaltenen Aufgabe eine physikalische Form geben, so können wir der Bedeutung der rechten Seiten dieses Systemes Gleichungen gemäss zweckmässig die beiden Fälle unterscheiden, dass 1, ${}_0\psi_0 = \alpha$, alle übrigen

ψ aber verschwinden und dass $2, {}_0\psi_0 = 0$, von den übrigen ψ keines verschwinde. Der erstere Fall tritt ein, wenn ein einziger Leiter isolirt vorhanden ist, dem Elektricität mitgetheilt wurde und wenn nun bestimmt werden soll, wie sich die Elektricität über den Leiter verbreitet; der zweite Fall, wenn die Influenzelektricität gesucht wird, die auf einem abgeleiteten Leiter durch eine punktförmige elektrische Masse hervorgebracht wird.

Das ganze Problem, die Vertheilung der Elektricität auf einem beliebigen Systeme von Leitern zu bestimmen, ist also sofort zu lösen, sobald man für jeden einzelnen Leiter die beiden Fragen beantwortet hat, „wie vertheilt sich über jeden einzelnen Leiter, wenn er isolirt ist, eine gegebene Elektricitätsmenge und welches ist die Influenzelektricität, die von einem elektrischen Massenpunkte auf dem abgeleiteten Leiter erzeugt wird?"

Es ist der Zweck der nächstfolgenden Paragraphen, diese beiden Fragen allgemein zu beantworten.

§. 2.

Die Vertheilung der Elektricität auf einem isolirten Leiter, wenn über seine Oberfläche gewisse geometrische Beziehungen stattfinden.

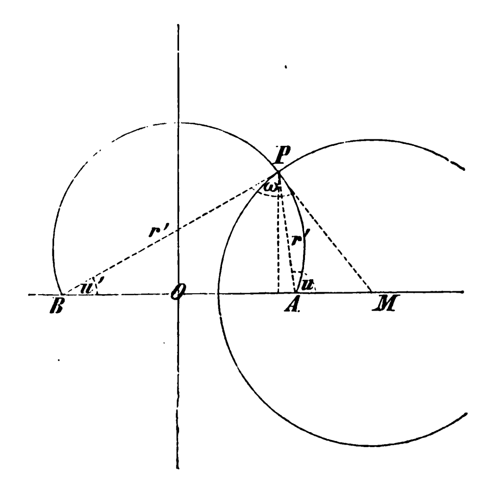
Ich habe hier zuerst zu verweisen auf die Paragraphen 1. und 2. Cap. III., doch ist das an jener Stelle Erwähnte derart, dass sich keine allgemeine Behandlungsmethode des vorgelegten Problemes darauf gründen lässt.

Eine andere, der Verallgemeinerung zwar fähige, aber nur äusserst schwierig anwendbare Methode ist die, durch Einführung zweckmässiger neuer Coordinaten der Potentialfunction V eine Form zu geben, die es leicht macht, dass V auf der gegebenen Oberfläche des Leiters constant bleibt. Carl Neumann[1]) hat diese Methode durch Anwendung der

1) Theorie der Elektricitäts- und Wärmevertheilung in einem Ringe von Carl Neumann. Halle 1864. Man vergleiche noch: Ueber das Gleichgewicht der Wärme und das der Elektricität in einem Körper welcher von zwei nicht concentrischen Kugelflächen begrenzt wird, von C. Neumann. Crelle Journal, Bnd. 62, p. 36.

bipolaren Coordinaten[1]) auf eine Ringfläche angewendet. Wir behandeln hier noch dieses Problem auf dem Wege Neumann's, um die Art der Rechnung zu zeigen. — Die Ringfläche, welche wir behandeln, sei so beschaffen, dass sie als Rotationsfläche betrachtet werden kann, die entsteht, wenn ein Kreis um eine in seiner Ebene liegende und ihn weder berührende noch schneidende Gerade rotirt. Jede specielle Lage dieser rotirenden Ebene nennen wir eine Meridianebene und bestimmen ihre Lage durch die Grösse des Winkels φ, den die Meridianebene mit einer bestimmten Anfangslage bildet. Wenn φ alle Werthe von 0 bis 2π durchläuft, so geht auch die Meridianebene durch alle möglichen Lagen hindurch. Wir können daher φ als die eine Coordinate eines Raumpunktes betrachten und bestimmen nun noch durch andere Coordinaten die Lage eines Punktes in einer bestimmten Meridianebene. Es seien hierzu A und B zwei Punkte, die die Endpunkte einer in der Meridianebene gelegenen Geraden von der Länge $2a$ bilden. Diese Gerade AB soll senkrecht zur Rotationsaxe liegen und von ihr halbirt werden. Vergl. Fig. 3.

Fig. 3.



1) Vergleiche die Literaturangabe am Ende des 3. Capitels.

Irgend ein Punkt der Meridianebene sei nun der Punkt P und es sei ω der Winkel BPA, alsdann liegen alle Punkte P, für welche der Winkel BPA so gross als ω ist, auf einem Kreise, der AB als Sehne besitzt; ist umgekehrt ω im Voraus gegeben, so gehört dazu auch ein bestimmter Kreis, der wiederum AB als Sehne besitzt. Wird ω gleich 2π, so geht ein solcher Kreis in die Gerade AB selbst über, wird $\omega = 0$, so wird der Kreis unendlich gross. Wir können daher irgend einen Punkt der Meridianebene auf der einen Seite von AB als auf einem Kreise gelegen betrachten, dem ein bestimmtes ω zugehört; um auch die Punkte, welche auf der andern Seite von AB liegen, unzweideutig, bestimmen zu können, nehmen wir für diese als Werth von ω die Ergänzung des Winkels BPA zu 2π, so dass also, wenn ein Punkt aus unendlicher Entfernung auf der einen Seite von AB durch AB hindurch in unendliche Entfernung auf der andern Seite von AB tritt, ω seinen Werth ändert von 0 bis 2π. Wir betrachten ω als zweite Coordinate eines Punktes P in der Meridianebene φ und haben nun nur noch eine dritte Coordinate hinzuzufügen, die angiebt, an welcher Stelle des Kreises ω der Punkt P liegen soll. Verlängern wir hierzu die Gerade BA um ein beliebiges Stück bis zum Punkte M, und legen von M aus Tangenten an die Kreise mit verschiedenen ω, so sind alle diese Tangenten gleich lang, nämlich nach einem bekannten Satze gleich dem Werthe $\sqrt{\overline{MA}.\overline{MB}}$. Beschreibt man daher aus dem Punkte M einen Kreis, der durch einen dieser Berührungspunkte hindurchgeht, so geht er auch durch alle anderen Berührungspunkte mit hindurch und schneidet folglich sämmtliche Kreise der verschiedenen ω rechtwinklig. Ist nun P irgend ein Punkt des um M beschriebenen Kreises, so ist, wie bereits erwähnt, $\overline{MA} : \overline{MP} = \overline{MP} : \overline{MB}$ und folglich sind die beiden Dreiecke MAP und MBP einander ähnlich, da sie auch noch den Winkel bei A gemeinsam besitzen, und es ist $\overline{PA} : \overline{PB} = \overline{PM} : \overline{MB}$ und $\overline{PA} : \overline{PB} = \overline{MA} : \overline{PM}$, folglich durch Multiplication

$$\frac{PA}{PB} = \sqrt{\frac{MA}{MB}} = \lambda.$$

Verbindet man also irgend einen Punkt P des um M

beschriebenen Kreises mit den beiden Punkten A und B, so ist das Verhältniss dieser Abstände für denselben Kreis um M ein constantes. Es empfiehlt sich daher auch dieses Verhältniss λ zu einer Coordinate zu machen, so dass wir nun zur Bestimmung irgend eines Raumpunktes die drei Coordinaten φ, ω und λ haben. Da φ von 0 bis 2π gezählt wird, so brauchen wir den Punkt M nur auf der einen Seite der Rotationsaxe liegen zu lassen und für λ können wir das Intervall auf den Bereich von 0 bis 1 beschränken, indem für $\lambda = 0$ der Punkt A selbst, für $\lambda = 1$ die Rotationsaxe angezeigt ist.

Der Kreis, den der Punkt A beschreibt, indem man die Meridianebene alle möglichen Lagen annehmen lässt, heisst der Polarkreis, man findet seinen Radius, wenn man von seinem Mittelpunkte aus, das ist von dem Punkte, wo die zur Rotationsaxe senkrechte Symmetrieebene von der Rotationsaxe geschnitten wird, Tangenten an die gegebene Ringfläche (in irgend einer Meridianebene) legt, die Länge der Tangente, gerechnet vom Mittelpunkte bis zum Berührungspunkte, ist der Radius des Polarkreises.

Sind nun ξ, η die in einer Meridianebene gemessenen rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes P, wenn die ξ parallel zur Rotationsaxe gemessen werden, gerechnet von der zu ihr senkrechten Symmetrieebene an, ist ferner $\overline{PB} = r'$, $\overline{PA} = r$; $\sphericalangle\, PBA = u'$; $\sphericalangle\, PAM = u$, so gelten die Gleichungen, wenn a der Radius des Polarkreises ist:

$$\xi = r \sin u \quad \xi = r' \sin u'$$
$$\eta - a = r \cos u \quad \eta + a = r' \cos u'.$$

Wir leiten hieraus ab, indem wir die Werthe $i = \sqrt{-1}$ und $e = 2{,}718\ldots$ benützen:

$$1, \quad \eta + i\xi - a = re^{iu}; \quad \eta + i\xi + a = r'e^{iu'},$$

während nach den neu eingeführten Coordinaten gilt:

$$\frac{r}{r'} = \lambda; \; u - u' = \omega.$$

Hiermit folgt aus 1,

$$2, \quad \frac{\eta + i\xi - a}{\eta + i\xi + a} = \lambda e^{i\omega},$$

oder

$$3, \qquad \eta + i\xi = a \frac{1 + \lambda e^{i\omega}}{1 - \lambda e^{i\omega}}$$

und durch Sonderung des Reellen und Imaginären:

$$4, \qquad \begin{gathered} \xi = a \frac{2\lambda \sin\omega}{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}; \; \eta = a \frac{1 - \lambda^2}{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2} \\ \xi^2 + \eta^2 = a^2 \frac{1 + 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}. \end{gathered}$$

Für die räumlichen rechtwinkligen Coordinaten $x\,y\,z$ entsteht, da $x = \xi$, $y = \eta\cos\varphi$, $z = \eta\sin\varphi$:

$$x = a \frac{2\lambda\sin\omega}{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}$$

$$y = a \frac{(1 - \lambda^2)\cos\varphi}{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}$$

$$z = a \frac{(1 - \lambda^2)\sin\varphi}{1 - 2\lambda\cos\varphi + \lambda^2}.$$

Für das Quadrat der Entfernung zweier Punkte $x\,y\,z$ und $x_1\,y_1\,z_1$ oder $\omega\,\varphi\,\lambda$ und $\omega_1\,\varphi_1\,\lambda_1$ entsteht daher:

$$\begin{aligned} &(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = (\xi^2 + \eta^2) + (\xi_1^2 + \eta_1^2) \\ &- 2(\xi\xi_1 + \eta\eta_1\cos(\varphi - \varphi_1)) \\ &= a^2 \left(\frac{1 + 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2} + \frac{1 + 2\lambda_1\cos\omega_1 + \lambda_1^2}{1 - 2\lambda_1\cos\omega_1 + \lambda_1^2} \right. \\ &\left. - 2\frac{4\lambda\lambda_1\sin\omega\sin\omega_1 + (1 - \lambda^2)(1 - \lambda_1^2)\cos(\varphi - \varphi_1)}{(1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2)(1 - 2\lambda_1\cos\omega_1 + \lambda_1^2)} \right). \end{aligned}$$

Setzt man in diesem Ausdruck

$$\omega - \omega_1 = \Omega; \; \varphi - \varphi_1 = \Phi,$$

und vereinfacht, so entsteht:

$$5, \qquad \begin{aligned} &(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \\ &= 2a^2 \frac{(1 + \lambda^2)(1 + \lambda_1^2) - 4\lambda\lambda_1\cos\Omega - (1 - \lambda^2)(1 - \lambda_1^2)\cos\Phi}{(1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2)(1 - 2\lambda_1\cos\omega_1 + \lambda_1^2)}. \end{aligned}$$

Für die reciproke Entfernung zweier Punkte wird hiernach der Ausdruck

$$T = \frac{\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}\,\sqrt{1 - 2\lambda_1\cos\omega_1 + \lambda_1^2}}{a\sqrt{2}\,\sqrt{(1 + \lambda^2)(1 + \lambda_1^2) - 4\lambda\lambda_1\cos\Omega - (1 - \lambda^2)(1 - \lambda_1^2)\cos\Phi}},$$

oder, wenn man

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{a\sqrt{2}\sqrt{(1+\lambda^2)(1+\lambda_1^2)-4\lambda\lambda_1\cos\Omega-(1-\lambda^2)(1-\lambda_1^2)\cos\Phi}}$$

setzt

$$6, \quad T = \sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}\,\sqrt{1-2\lambda_1\cos\omega_1+\lambda_1^2}\,.\,\mathfrak{T}.$$

Wir entwickeln nun den Ausdruck $\mathfrak{T}$ in eine Reihe, welche nach den Cosinus der Vielfachen von Ω fortschreitet, also in eine Fouriersche Reihe, wobei Ω innerhalb der Grenzen $0 \leqq \Omega \leqq 2\pi$ liegt. Die Entwickelungscoëfficienten dieser Reihe sind alsdann Functionen von Φ, die sich ebenfalls in eine nach den Cosinus der Vielfachen von Φ fortschreitende Reihe entwickeln lassen, wobei Φ innerhalb der Grenzen $0 \leqq \Phi \leqq 2\pi$ liegt.

Soll aber eine solche Entwickelung möglich sein, so darf $\mathfrak{T}$ nirgends unendlich werden, um diess zu untersuchen, bestimmen wir erst den geometrischen Sinn der Factoren $\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}$ und $\sqrt{1-2\lambda_1\cos\omega_1+\lambda_1^2}$ und benützen hierzu die Gleichung 5, indem wir für den Punkt $x_1\,y_1\,z_1$ den Punkt B des Polarkreises nehmen, der, wenn $x\,y\,z$ auf der Meridianebene φ liegt, auf der Meridianebene $\varphi+\pi$ gelegen ist. Wir erhalten dann

$$\overline{PB} = \frac{2a}{\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}}$$

demnach ist auch

$$7, \quad \mathfrak{T} = \frac{1}{4a^2}\frac{\overline{PB}\,.\,\overline{P_1B_1}}{\overline{PP_1}},$$

welche Gleichung zeigt, dass $\mathfrak{T}$ nur unendlich wird, wenn $\overline{PP_1} = 0$ d. h. wenn die beiden Punkte P und P_1 oder $x\,y\,z$ und $x_1\,y_1\,z_1$ zusammenfallen, oder wenn beide Punkte P und P_1 zugleich in unendliche Entfernung rücken, wir berücksichtigen diese Bedingung vollständig, indem wir von λ und λ_1 verlangen, dass

$$0 \leqq \lambda < \lambda_1 \leqq 1.$$

Dann können wir dem angegebenen Werthe von $\mathfrak{T}$, nämlich

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{a\sqrt{2}\sqrt{(1+\lambda^2)(1+\lambda_1^2)-4\lambda\lambda_1\cos\Omega-(1-\lambda^2)(1-\lambda_1^2)\cos\Phi}}$$

die Form geben

$$\mathfrak{T} = \sum_0^\infty {}_p \sum_0^\infty {}_q F_p{}^q \cos q\,\Phi \cos p\,\Omega.$$

Um die Coëfficienten $F_p{}^q$, welche nur Functionen von λ und λ_1 sein können, zu bestimmen, multipliciren wir die letzte Gleichung mit $\cos r\,\Phi \cos s\,\Omega\, d\,\Phi\, d\,\Omega$ und integriren zwischen den Grenzen 0 und 2π sowohl im Bezug auf Φ, wie auch im Bezug auf Ω. Auf der rechten Seite entsteht dadurch:

$$\int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{2\pi} \left(\sum_0^\infty {}_p \sum_0^\infty {}_q F_p{}^q \cos q\,\Phi \cos p\,\Omega \right) \cos s\,\Omega \cos r\,\Phi\, d\,\Omega,$$

oder weil

$$\cos p\,\Omega \cos s\,\Omega = \tfrac{1}{2} [\cos (p-s)\,\Omega + \cos (p+s)\,\Omega]$$
$$\cos q\,\Phi \cos r\,\Phi = \tfrac{1}{2} [\cos (q-r)\,\Phi + \cos (q+r)\,\Phi]$$

und für jedes ganze reelle m und n

$$\int_0^{2\pi} \cos (m-n)\,\varphi\, d\varphi = \begin{cases} 0 \text{ wenn } m \gtrless n \\ 2\pi \quad ,, \quad m = n, \end{cases}$$

so wird der Werth des vorstehenden Doppelintegrales einfach $4\pi^2 F_s{}^r$, so dass wir zur Bestimmung der Entwickelungscoëfficienten erhalten

$$8, \quad F_s{}^r = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \frac{\cos r\,\Phi \cos s\,\Omega\, d\Phi\, d\Omega}{a\sqrt{2}\sqrt{(1+\lambda^2)(1+\lambda_1^2) - 4\lambda\lambda_1 \cos\Omega - (1-\lambda^2)(1-\lambda_1^2)\cos\Phi}}.$$

Diese Bestimmung von $F_s{}^r$ kann nun noch dahin vereinfacht werden, dass $F_s{}^r$ erscheint als das Product zweier Factoren, von denen der eine nur eine Function von λ, der andere nur eine Function von λ_1 ist.

Gebraucht man nämlich die Bezeichnung

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2} + \lambda \frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\partial^2 U}{\partial (l\lambda)^2},$$

so kann man leicht prüfen, dass $\mathfrak{T}$ den folgenden beiden Differentialgleichungen genügt, je nachdem man den Punkt P oder P_1 als beweglich ansieht

$$\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\frac{\partial^2\sqrt{1-\lambda^2}.\mathfrak{T}}{(\partial l\lambda)^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{T}}{\partial\Omega^2}+\left(\frac{2\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2\left(\frac{\partial^2\mathfrak{T}}{\partial\Phi^2}+\frac{\mathfrak{T}}{4}\right)=0$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}}\frac{\partial^2\sqrt{1-\lambda_1^2}\,\mathfrak{T}}{(\partial l\lambda_1)^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{T}}{\partial\Omega^2}+\left(\frac{2\lambda_1}{1-\lambda_1^2}\right)^2\left(\frac{\partial^2\mathfrak{T}}{\partial\Phi^2}+\frac{\mathfrak{T}}{4}\right)=0.$$

Setzt man in diese Gleichungen die für $\mathfrak{T}$ gefundene Entwickelung ein, so findet man, dass $F_p{}^q$ den Gleichungen genügen muss:

$$9,\quad \begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\frac{\partial^2\sqrt{1-\lambda^2}\,F_p{}^q}{(\partial l\lambda)^2}&=\left(p^2+[4q^2-1]\left(\frac{\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2\right)F_p{}^q\\ \frac{1}{\sqrt{1-\lambda_1^2}}\frac{\partial^2\sqrt{1-\lambda_1^2}\,F_p{}^q}{(\partial l\lambda_1)^2}&=\left(p^2+[4q^2-1]\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1^2}\right)^2\right)F_p{}^q.\end{aligned}$$

Sind nun $u(\lambda)$ und $U(\lambda)$ zwei particuläre Integrale der ersten dieser Differentialgleichungen, so hat $F_p{}^q$ die Form:

$$10,\quad F_p{}^q=u(\lambda)\,v(\lambda_1)+U(\lambda)\,V(\lambda_1),$$

wo $v(\lambda_1)$ und $V(\lambda_1)$ die Functionen vertreten, welche die particulären Integrale $u(\lambda)$ und $U(\lambda)$ zu einem vollständigen Integrale machen; auf dieselbe Form von $F_p{}^q$ führt auch die zweite der Differentialgleichungen 9, wenn $v(\lambda_1)$ und $V(\lambda_1)$ zwei particuläre Integrale derselben sind, die durch $u(\lambda)$ und $U(\lambda)$ zum vollständigen Integrale ergänzt werden.

Macht man nun in 8, $\lambda=0$, so hängt der Werth von $\mathfrak{T}$ gar nicht mehr von Ω ab und die Coëfficienten F, deren unterer Index von 0 verschieden ist, verschwinden sämmtlich, gleichgültig welchen Werth λ_1 habe, aus der Gleichung 10, ergiebt sich daher

$$u(0)\,v(\lambda_1)+U(0)\,V(\lambda_1)=0.$$

Hieraus folgt, dass $\frac{V(\lambda_1)}{v(\lambda_1)}$ eine Constante $=C_1$ ist, dass wir also setzen können

$$V(\lambda_1)=C_1\,v(\lambda_1).$$

Giebt man ferner in 8, λ_1 den Werth 1, so wird $\mathfrak{T}$ von Φ unabhängig, und es verschwinden die Coëfficienten F, deren oberer Index von Null verschieden ist, ähnlich wie vorhin kommen wir damit zu dem Resultate, dass

$$U(\lambda)=C_2\,u(\lambda).$$

Die beiden eben erlangten Resultate ergeben für die Coëfficienten $F_p{}^q$, ausgenommen vielleicht noch $F_0{}^0$, die Form

$$11, \quad F_p{}^q = C_p{}^q \, J_p{}^q(\lambda) \, A_p{}^q(\lambda_1).$$

Sehen wir jetzt zu, ob auch $F_0{}^0$ diese Form hat.

Aus 10, folgt, dass auch $F_0{}^0$ die Form hat

$$12, \quad F_0{}^0 = u(\lambda)\, v(\lambda_1) + U(\lambda)\, V(\lambda_1),$$

wenn, wie die Gleichungen 9, besagen, $u(x)$, $v(x)$, $U(x)$ und $V(x)$ particuläre Integrale der Differentialgleichung

$$13, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\partial^2 \sqrt{1-x^2}\, F_0{}^0}{(\partial l x)^2} + \left(\frac{x}{1-x^2}\right)^2 F_0{}^0 = [F_0{}^0, x] = 0$$

sind. Nach 8, und 12, aber erhalten wir, wenn wir einmal $\lambda = 0$ dann $\lambda_1 = 1$ setzen, die beiden Gleichungen

$$\frac{1}{\sqrt{2a^2}} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\Omega\, d\Phi}{\sqrt{(1+\lambda_1^2)-(1-\lambda_1^2)\cos\Phi}} = 4\pi^2 \{u(0) v(\lambda_1) + U(0)\, V(\lambda_1)\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2a^2}} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\Omega\, d\Phi}{\sqrt{2(1+\lambda^2)-4\lambda\cos\Omega}} = 4\pi^2 \{u(\lambda) v(1) + U(\lambda)\, V(1)\}.$$

Setzt man in diesen beiden Gleichungen für λ und λ_1 den Buchstaben x, so stellen die linken Seiten particuläre Integrale der Differentialgleichung 13, dar, die rechten Seiten können daher, wenn unter A, B, C, D Integrationsconstanten verstanden werden, dargestellt werden durch die Formen, $Au(x) + B\,U(x) = wx$; und $Cv(x) + DV(x) = W(x)$, so dass wir nach einer einfachen Transformation der linken Seiten sagen können:

$$14, \quad \begin{aligned} w(x) &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-2x\cos\theta+x^2}} \\ W(x) &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2}+x^2\cos^2\frac{\theta}{2}}} \end{aligned}$$

sind particuläre Integrale der Differentialgleichung 13.

Nach 12, hat also $F_0{}^0$ die Form

$$15, \quad F_0{}^0 = w(\lambda)\, r(\lambda_1) + W(\lambda)\, R(\lambda_1),$$

wenn $r(\lambda_1)$ und $R(\lambda_1)$ particuläre Integrale der aus 13, sich ergebenden Differentialgleichung $[F_0^0, \lambda_1] = 0$ sind.

Nun ist weiter

$$W(0) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} = \left[2l\,\mathrm{tng}\,\frac{2\pi}{4} - 2l\,\mathrm{tng}\frac{0}{4}\right].$$

Der Werth von $W(0)$ ist also unendlich gross oder unbestimmt, dagegen wissen wir, dass $\mathfrak{T}$ selbst sowohl, wie auch alle Coëfficienten seiner Entwickelung immer bestimmte endliche Werthe haben, es muss demnach in 15, $R(\lambda_1) = 0$ sein und also auch F_0^0 die Form haben $F_0^0 = w(\lambda)\,r(\lambda_1)$. Hiermit ist nun, wenn man noch 11, berücksichtigt, ganz allgemein nachgewiesen, dass die Entwickelung von $\mathfrak{T}$ die Form hat

$$16, \quad \mathfrak{T} = \sum_0^\infty{}_p \sum_0^\infty{}_q\, C_p{}^q\, J_p{}^q\,(\lambda)\; A_p{}^q\,(\lambda_1) \cos p\,\Omega \cos q\,\Phi,$$

wo $J_p{}^q(\lambda)$ nur von λ, $A_p{}^q(\lambda_1)$ nur von λ_1 abhängt und die $C_p{}^q$ Constanten sind.

Um die Entwickelungscoëfficienten selbst zu erhalten, gebraucht Neumann ein analytisches Resultat, das er auf folgendem Wege gewinnt:

Es ist, die Convergenzbedingungen als erfüllt vorausgesetzt:

$$\frac{1}{(U - V\cos\theta)^{\frac{2n+1}{2}}} = \frac{1}{U^{\frac{2n+1}{2}}}\,.$$

$$\left(1 + \frac{2n+1}{2}\,\frac{V}{U}\cos\theta + \frac{2n+1}{2}\cdot\frac{2n+3}{4}\left(\frac{V}{U}\cos\theta\right)^2 + \ldots\right)$$

folglich muss auch, wenn man beiderseitig mit $\cos\nu\theta\,d\theta$ multiplicirt und zwischen den Grenzen 0 und 2π integrirt und beachtet, dass

$$\int_0^{2\pi} \cos^p\theta \cos\nu\theta\,d\theta = \begin{cases} 0 \text{ wenn } p < \nu \\ \frac{2\pi}{2^\nu} \quad \text{,,} \quad p = \nu \end{cases} \quad p \text{ und } \nu \text{ ganze positive Zahlen,}$$

entstehen, wenn U und V von θ unabhängig sind

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\nu\theta\, d\theta}{(U - V\cos\theta)^{\frac{2n+1}{2}}} = \frac{1}{U^{\frac{2n+1}{2}}} \cdot \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2n+3}{4} \cdots$$

$$\frac{2n+2\nu-1}{2\nu} \frac{2\pi}{2^\nu} \left(\frac{V}{U}\right)^\nu \left\{1 + A\frac{V}{U} + B\left(\frac{V}{U}\right)^2 + \cdots\right\},$$

wo A, B, ... gewisse Constanten sind, auf deren Werth es hier nicht weiter ankommt. Dividiren wir nämlich die vorige Gleichung durch V^ν und nehmen an, dass, wenn man das Argument x, von dem die Functionen V und U abhängen, in x_0 übergehen lässt, V verschwindet, so entsteht aus der vorigen Gleichung:

$$\left(\int_0^{2\pi} \frac{\cos\nu\theta\, d\theta}{V^\nu(U - V\cos\theta)^{\frac{2n+1}{2}}}\right)_{x=x_0}$$

$$= \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2n+3}{4} \cdot \frac{2n+5}{6} \cdots \frac{2n+2\nu-1}{2\nu} \frac{2\pi}{2^\nu} U_{(x_0)}^{-\frac{2n+2\nu+1}{2}}.$$

Wir benützen also den Hülfssatz:

„Sind $U = U(x)$ und $V = V(x)$ irgend zwei von x abhängende Functionen, von welchen die letztere für $x = x_0$ verschwindet, während die erstere für $x = x_0$ von Null verschieden bleibt, so ist der Werth, welchen das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\nu\theta\, d\theta}{V^\nu (U - V\cos\theta)^{\frac{2n+1}{2}}}$$

für $x = x_0$ annimmt, gleich

$$\frac{\varDelta_n^\nu}{U(x_0)^{\frac{2n+2\nu+1}{2}}},$$

wo $\varDelta_n^\nu$ den Werth besitzt

$$\varDelta_n^\nu = \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2n+3}{4} \cdot \frac{2n+5}{6} \cdots \frac{2n+2\nu-1}{2\nu} \frac{2\pi}{2^\nu}.$$

Die Werthe von $\varDelta_n^0$, $\varDelta_n^1$, $\varDelta_n^2$ sind demnach z. B. folgende

$$\varDelta_n^0 = 1.2\pi$$

$$\varDelta_n^1 = \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2\pi}{2}$$

$$\Delta_n^2 = \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2n+3}{2} \cdot \frac{2n}{2^2}.$$

Vorausgesetzt wird bei diesem Satz, dass n sowohl als ν irgend zwei ganze positive Zahlen sind."

Substituirt man nun den Werth von F_p^q aus 11, in 8, dividirt die erhaltene Gleichung durch $(4\lambda\lambda_1)^p$ und setzt nach Ausführung der Integration im Bezug auf Ω $\lambda=0$, so entsteht

$$\left(\int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{2\pi} \frac{\Sigma \cos p\Omega \cos q\Phi d\Omega}{(4\lambda\lambda_1)^p}\right)_{\lambda=0} = 4\pi^2 \sqrt{2a^2}\, C_p{}^q \left(\frac{J_p{}^q(\lambda)}{(4\lambda)^p}\right)_{\lambda=0} \frac{A_p{}^q(\lambda_1)}{\lambda_1{}^p}.$$

Die Integration nach Ω kann hier durch den Hülfssatz ausgeführt werden, wenn man setzt

$$U = (1+\lambda^2)(1+\lambda_1{}^2) - (1-\lambda^2)(1-\lambda_1{}^2)\cos\Phi$$
$$V = 4\lambda\lambda_1$$

so dass wird

$$\Delta_0{}^p \int_0^{2\pi} \frac{\cos q\Phi\, d\Phi}{[(1+\lambda_1{}^2)-(1-\lambda_1{}^2)\cos\Phi]^{\frac{2p+1}{2}}} = 4\pi^2\sqrt{2a^2}\, C_p{}^q \left(\frac{J_p{}^q(\lambda)}{(4\lambda)^p}\right)_{\lambda=0} \frac{A_p{}^q(\lambda_1)}{\lambda_1{}^p},$$

wie die rechte Seite dieser Gleichung zeigt, ist $\frac{A_p{}^q(\lambda_1)}{\lambda_1{}^p}$ nur durch einen constanten Factor von dem links stehenden Integrale verschieden, da wir die Bestimmung der Constanten $C_p{}^q$ der rechten Seite noch vollständig in der Hand haben, so können wir setzen:

$$17, \quad \frac{A_p{}^q(\lambda_1)}{\lambda_1{}^p} = \frac{2^{\frac{2p+1}{2}}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos q\Phi\, d\Phi}{[(1+\lambda_1{}^2)-(1-\lambda_1{}^2)\cos\Phi]^{\frac{2p+1}{2}}}.$$

Durch die Gleichung 17, ist $A_p{}^q(\lambda_1)$ bestimmt, verfahren wir ähnlich zur Bestimmung von $J_p{}^q(\lambda)$, indem wir jetzt, statt mit $4\lambda\lambda_1$ zu dividiren und nach geschehener Integration $\lambda=0$ zu setzen, jetzt mit $(1-\lambda^2)^q(1-\lambda_1{}^2)^q$ dividiren und nach geschehener Integration $\lambda_1=1$ setzen, so entsteht:

$$\left(\int_0^{2\pi} d\Omega \int_0^{2\pi} \frac{\Sigma \cos q\Phi \cos p\Omega\, d\Phi}{(1-\lambda^2)^q(1-\lambda_1{}^2)^q}\right)_{\lambda_1=1} = 4\pi^2\sqrt{2a^2}\, C_p{}^q \frac{J_p{}^q(\lambda)}{(1-\lambda^2)^q} \left(\frac{A_p{}^q(\lambda_1)}{(1-\lambda_1{}^2)^q}\right)_{\lambda_1=1}$$

und wenn wir jetzt unsern Hülfssatz wieder anwenden, indem

$$U = (1 + \lambda^2)(1 + \lambda_1^2) - 4\lambda\lambda_1 \cos\Omega$$
$$V = (1 - \lambda^2)(1 - \lambda_1^2),$$

so ergiebt sich:

$$\Delta_0{}^q \int_0^{2\pi} \frac{\cos p\,\Omega\, d\Omega}{[2(1+\lambda^2) - 4\lambda\cos\Omega]^{\frac{2q+1}{2}}} = 4\pi^2 \sqrt{2a^2}\, C_p{}^q \frac{J_p{}^q}{(1-\lambda^2)^q} \left(\frac{A_p{}^q(\lambda_1)}{(1-\lambda_1^2)^q}\right)_{\lambda_1=1}.$$

Aus ähnlichem Grunde wie vorhin sind wir hier berechtigt zu setzen:

$$18, \quad \frac{J_p{}^q(\lambda)}{(1-\lambda^2)^q} = \frac{2^{\frac{2q+1}{2}}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos p\,\Omega\, d\Omega}{[2(1+\lambda^2) - 4\lambda\cos\Omega]^{\frac{2q+1}{2}}}.$$

Substituirt man diesen Werth für $J_p{}^q(\lambda) : (1-\lambda^2)^q$ in die vorige Gleichung, so entsteht zur Bestimmung von $C_p{}^q$

$$19, \quad \Delta_0{}^q = 4\pi^2 \sqrt{2a^2}\, C_p{}^q \frac{2^{\frac{2q+1}{2}}}{2\pi} \left(\frac{A_p{}^q(\lambda_1)}{(1-\lambda_1^2)^q}\right)_{\lambda_1=1}.$$

Aus 17, folgt aber

$$\frac{A_p{}^q(\lambda_1)}{\lambda_1^p(1-\lambda_1^2)^q} = \frac{2^{\frac{2p+1}{2}}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos q\,\Phi\, d\Phi}{(1-\lambda_1^2)^q [(1+\lambda_1^2) - (1-\lambda_1^2)\cos\Phi]^{\frac{2p+1}{2}}}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wird aber für $\lambda_1 = 1$ nach unserem Hülfssatze

$$\frac{\Delta_p{}^q}{2^{\frac{2p+2q+1}{2}}} \cdot \frac{2^{\frac{2p+1}{2}}}{2\pi} = \frac{\Delta_p{}^q}{2\pi\, 2^q},$$

folglich erhalten wir

$$\left(\frac{A_p{}^q(\lambda_1)}{(1-\lambda_1^2)^q}\right)_{\lambda_1=1} = \frac{\Delta_p{}^q}{2\pi . 2^q}$$

und damit wird aus 19,

$$\Delta_0{}^q = 4\pi^2 \sqrt{2a^2} \frac{2^{\frac{2q+1}{2}}}{2\pi} \cdot \frac{\Delta_p{}^q}{2\pi . 2^q} C_p{}^q = 2a\, \Delta_p{}^q\, C_p{}^q.$$

Also ist

$$C_p{}^q = \frac{1}{2a} \frac{\Delta_0{}^q}{\Delta_p{}^q} = \frac{1}{2a} \frac{1 . 3 . \ldots (2q-1)}{(2p+1)(2p+3) \ldots (2p+2q-1)},$$

oder

$$20, \quad C_p{}^q = \frac{(1 . 3 . \ldots . \overline{2p-1})(1 . 3 . \ldots \overline{2q-1})}{1 . 3 . \ldots (2p+2q-1)} \cdot \frac{1}{2a} = C_q{}^p.$$

Durch die Gleichungen 17, 18, und 20, sind wir nun zu dem Resultate gelangt:

Der Ausdruck

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{\sqrt{2a^2}} \frac{1}{\sqrt{(1+\lambda^2)(1+\lambda_1^2) - 4\lambda\lambda_1 \cos\Omega - (1-\lambda^2)(1-\lambda_1^2)\cos\Phi}}$$

lässt sich, falls die Werthe von λ und λ_1 den Bedingungen

$$0 \leqq \lambda < \lambda_1 \leqq 1$$

unterworfen gedacht werden, immer durch folgende Entwickelung darstellen

$$\mathfrak{T} = \sum_0^\infty{}^p \sum_0^\infty{}^q \, C_p^q \, J_p^q(\lambda) \, A_p^q(\lambda_1) \cos p\Omega \cos q\Phi,$$

wo die Constanten C und die Functionen J und A die Werthe:

$$C_p^q = \frac{1}{2a} \frac{(1.3.\ldots 2p-1)(1.3.\ldots 2q-1)}{1.3.\ldots 2p+2q-1}$$

$$J_p^q(\lambda) = \frac{(1-\lambda^2)^q}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos p\theta \, d\theta}{(1-2\lambda\cos\theta+\lambda^2)^{\frac{2q+1}{2}}}$$

$$A_p^q(\lambda_1) = \frac{\lambda_1^p}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos q\theta \, d\theta}{\left(\sin^2\frac{\theta}{2} + \lambda_1^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{2p+1}{2}}}$$

besitzen.

Durch diesen Satz haben wir auch ohne weiteres:

Die reciproke Entfernung zweier Punkte xyz und $x_1 y_1 z_1$

$$T = \frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}$$

hat, falls λ, ω, φ und λ_1, ω_1, φ_1 die neuen Coordinaten jener Punkte vorstellen, den Werth

$$T = \frac{1}{\sqrt{2a^2}} \frac{\sqrt{1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2}\,\sqrt{1-2\lambda_1\cos\omega_1+\lambda_1^2}}{\sqrt{(1+\lambda^2)(1+\lambda_1^2)-4\lambda\lambda_1\cos(\omega-\omega_1)-(1-\lambda^2)(1-\lambda_1^2)\cos(\varphi-\varphi_1)}}.$$

Dieser Werth lässt sich, falls der Punkt λ, ω, φ auf einer engeren, der Punkt λ_1, ω_1, φ_1 auf einer

weiteren Ringfläche liegt, d. i. falls $\lambda < \lambda_1$ ist, durch folgende Entwickelung darstellen:

$$T = R.R_1 \sum_0^\infty{}^p \sum_0^\infty{}^q C_p{}^q J_p{}^q(\lambda) A_p{}^q(\lambda_1) \cos p(\omega - \omega_1) \cos q(\varphi - \varphi_1).$$

Hier haben R und R_1 die Bedeutungen

$$R = \sqrt{1 - 2\lambda \cos\omega + \lambda^2}\,; \quad R_1 = \sqrt{1 - 2\lambda_1 \cos\omega_1 + \lambda_1{}^2}$$

und die Werthe von $C_p{}^q$, $J_p{}^q(\lambda)$ $A_p{}^q(\lambda_1)$ sind durch den vorhergehenden Satz definirt.

Wenden wir diese Entwickelung an auf den Specialfall $\lambda_1 = 1$, $\omega_1 = 0$, so ergiebt sich

$$\frac{1}{\sqrt{2a^2}} \frac{1}{\sqrt{2(1+\lambda^2) - 4\lambda\cos\omega}}$$

$$= \sum_0^\infty{}^p \sum_0^\infty{}^q C_p{}^q J_p{}^q(\lambda) A_p{}^q(1) \cos p\omega \cos q(\varphi - \varphi_1).$$

Nun ist

$$A_p{}^q(1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos q\theta \, d\theta = \begin{cases} 1 & \text{wenn } q = 0 \\ 0 & \;\;,, \quad q > 0, \end{cases}$$

folglich wird

$$\frac{1}{\sqrt{2a^2}} \frac{1}{\sqrt{2(1+\lambda^2) - 4\lambda\cos\omega}} = \sum_0^\infty{}^p C_p{}^0 J_p{}^0(\lambda) \cos p\omega.$$

Es ist weiter

$$C_p{}^0 = \frac{1}{2a},$$

folglich auch

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}} = \frac{1}{R} = \sum_0^\infty{}^p J_p{}^0(\lambda) \cos p\omega$$

und analog

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\lambda_1\cos\omega_1 + \lambda_1{}^2}} = \frac{1}{R_1} = \sum_0^\infty{}^p J_p{}^0(\lambda_1) \cos p\omega_1.$$

Es ist nun nicht schwer, die im vorigen Paragraph gestellten beiden Fundamentalaufgaben für den Ring zu lösen. Es sei zu diesem Zwecke $d\sigma$ das Oberflächenelement unseres Kreisringes und die Dichtheit der Elektricität im Oberflächenelement $d\sigma$ sei ϱ, dann befindet sich auf dem Oberflächen-

element die Elektricitätsmenge $\varrho d\sigma$; diese Elektricitätsmenge ist, weil λ für den ganzen Ring constant ist, nur eine Function von φ und ω, wir können daher setzen

$$\varrho\, d\sigma = \frac{f(\omega, \varphi)}{\sqrt{1 - 2\lambda \cos\omega + \lambda^2}}\, d\omega\, d\varphi,$$

wo nun $f(\omega, \varphi)$ eine noch näher zu bestimmende Function bezeichnet.

Im ersten Falle nun, wenn der Kreisring isolirt vorhanden ist, muss der Symmetrie der Leiteroberfläche wegen $\varrho\, d\sigma$ denselben Werth besitzen für alle beliebigen Meridianebenen φ, oder es darf $\varrho\, d\sigma$ nicht von φ abhängen, folglich muss auch $f(\omega, \varphi)$ von φ unabhängig sein; ferner muss der Symmetrie zu einer Ebene senkrecht zur Rotationsaxe wegen $\varrho\, d\sigma$ denselben Werth behalten, wenn ω in $2\pi - \omega$ übergeht, hieraus folgt, dass wir für $\varrho d\sigma$ die Annahme machen können

$$21, \quad \varrho d\sigma = \frac{\Sigma^p\, K_p \cos p\omega}{\sqrt{1 - 2\lambda \cos\omega + \lambda^2}}\, d\omega\, d\varphi = \frac{1}{R}\left(\Sigma^p\, K_p \cos p\omega\right) d\omega\, d\varphi.$$

Ist nun T_i die reciproke Entfernung dieses Oberflächenelementes von einem im Innern des Ringes gelegenen Punkt i, so soll nun im Falle des elektrischen Gleichgewichtes sein

$$22, \quad \int T_i\, \varrho\, d\sigma = \alpha,$$

wenn sich die Integration über die ganze Ringfläche erstreckt und i jeden beliebigen Punkt im Innern des Ringes oder auf demselben bezeichnen kann. Da es ausreicht, das erstere anzunehmen, so ist das λ des Punktes i immer kleiner als das λ irgend eines Oberflächenpunktes, folglich gilt

$$23, \quad T_i = R_i R \sum_0^\infty{}^p \sum_0^\infty{}^q C_p{}^q J_p{}^q(\lambda_i) A_p{}^q(\lambda) \cos p(\omega_i - \omega) \cos q(\varphi_i - \varphi).$$

Führt man die angegebenen Werthe aus 21, und 23, in die Gleichung 22, ein und beachtet, dass die Integration über die ganze Ringfläche verlangt, dass sowohl im Bezug auf ω, wie auch im Bezug auf φ von 0 bis 2π zu integriren ist, so lässt sich die Integration im Bezug auf φ ohne weiteres ausführen, indem alle diejenigen Glieder verschwinden, für welche $q > 0$ ist, so dass allein übrig bleibt:

$$\alpha = 2\pi R_i \int_0^{2\pi} \left(\sum^p K_p \cos p\omega\right)$$

$$\left(\sum^p C_p{}^0 J_p{}^0(\lambda_i)\, A_p{}^0(\lambda)\, \cos p(\omega_i - \omega)\right) d\omega$$

$$= 4\pi^2 R_i \sum_0^\infty {}^p K_p\, C_p{}^0\, J_p{}^0(\lambda_i)\, A_p{}^0(\lambda) \cos p\,\omega_i.$$

Nun ist, wie oben am Schlusse der Entwickelung von $\frac{1}{R}$ und $\frac{1}{R_1}$ angegeben wurde

$$C_p{}^0 = \frac{1}{2a};\ R_i = \frac{1}{\sum_0^\infty{}^p J_p{}^0(\lambda_i) \cos p\,\omega_i},$$

demnach entsteht

$$\alpha = \frac{\sum_0^\infty{}^p K_p\, A_p{}^0(\lambda)\, J_p{}^0(\lambda_i) \cos p\,\omega_i}{\sum_0^\infty{}^p J_p{}^0(\lambda_i) \cos p\,\omega_i} \cdot \frac{4\pi^2}{2a}.$$

Soll diese Gleichung für jeden Werth von λ_i und ω_i erfüllt sein, so muss sein

$$\alpha = \frac{2\pi^2}{a} K_p\, A_p{}^0(\lambda)$$

für jeden Werth von p, folglich erhalten wir die gesuchten Entwickelungscoëfficienten in der Form

$$24,\quad K_p = \frac{\alpha a}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{A_p{}^0(\lambda)}.$$

Hiermit wird aus der Gleichung 21,

$$\varrho\, d\sigma = \frac{\alpha a}{2\pi^2 R} \sum_0^\infty{}^p \frac{\cos p\,\omega}{A_p{}^0(\lambda)}\, d\omega\, d\varphi.$$

Substituirt man links den Werth von $d\sigma$, wie er sich leicht aus den im Anfange dieses Paragraphen angegebenen Transformationsformeln der xyz Coordinaten in die λ, ω, φ Coordinaten ergiebt, wenn man noch die allgemeinen Transformationsformeln in §. 3. Cap. I. anwendet, wodurch man erhält

$$d\sigma = \frac{2a^2 \lambda(1-\lambda^2)\, d\omega\, d\varphi}{R^4},$$

so ergiebt sich endlich der gesuchte Werth von ϱ zu

$$25, \quad \varrho = \frac{\alpha R^3}{4\pi^2 a\lambda(1-\lambda^2)} \sum_0^\infty p \frac{\cos p\omega}{A_p^0(\lambda)}.$$

Hierin bedeutet

$$A_p^0(\lambda) = \frac{\lambda p}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(\sin^2\frac{\theta}{2} + \lambda^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{2p+1}{2}}}$$

$$R = \sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}.$$

Soll im zweiten Falle die Influenzelektricität eines elektrischen Massenpunktes auf dem abgeleiteten Ringe gefunden werden, so setze man jetzt

$$\varrho\, d\sigma = \frac{1}{R}\left\{\sum p \sum q \begin{matrix} K_p{}^q \cos p\omega \cos q\varphi + L_p{}^q \sin p\omega \sin q\varphi \\ + M_p{}^q \cos p\omega \sin q\varphi + N_p{}^q \sin p\omega \cos q\varphi \end{matrix}\right\} d\varphi d\omega,$$

und bestimme wie im vorigen Falle die Potentialfunction dieser auf der Oberfläche befindlichen elektrischen Ladung auf einen beliebigen Punkt $\lambda_i\ \omega_i\ \varphi_i$ im Innern des Ringes. Ebenso bestimme man die Potentialfunction des influenzirenden Massenpunktes λ', ω', φ' auf denselben Punkt $\lambda_i\ \omega_i\ \varphi_i$ und setze dann die mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehene letztere Potentialfunction gleich der ersteren. Da nun die so entstehende Gleichung gelten muss, wo auch im Innern des Ringes der Punkt $\lambda_i\ \omega_i\ \varphi_i$ liegt, so giebt die zuletzt erlangte Gleichung ohne weiteres die Bestimmung der einzelnen $K_p{}^q$, $L_p{}^q$, $M_p{}^q$ und $N_p{}^q$, also die Lösung dieser zweiten Fundamentalaufgabe.

Will man die beiden erlangten Resultate der Fundamentalaufgabe nach Massgabe dessen, was in §. 1. besprochen wurde, weiter verwenden, so hat man freilich noch die für die elektrische Dichtheit gefundenen Ausdrücke nach Kugelfunctionen zu entwickeln.

Das in diesem §. behandelte Ringproblem ist desswegen besonders wichtig, weil es die in §. 1. verlangte Zerlegung des Leiters in Partialleiter erspart, die in diesem Falle mehrfach vorgenommen werden müsste, um ein gewöhnliches räumliches Polarcoordinatensystem anwenden zu können.

§. 3.
Allgemeine Lösung der Fundamentalaufgabe, auf welche der §. 1. dieses Kapitels führte.

Es ist hier allgemein anzugeben, wie man zur Auflösung des Systemes unendlich vieler linearer Gleichungen VI, §. 1. gelangen kann. Diese Auflösung hat nach dem Grundsatze zu erfolgen, dass man sich den genau richtigen Werthen der Unbekannten ${}^n{}_r\varkappa_p{}^\lambda$ um so mehr nähert, je grösser die Anzahl der Gleichungen ist, die man wirklich auflöst, und dass die ${}^n{}_r\varkappa_p{}^\lambda$ mit niedrigem Index n die absolut grösseren, also auch wichtigeren sind.

Setzen wir die Aufeinanderfolge der Unbekannten ${}^n{}_r\varkappa_p{}^\lambda$ ein für allemal in der Art fest

$${}^0{}_r\varkappa_p{}^0;\ {}^1{}_r\varkappa_p{}^0,\ {}^1{}_r\varkappa_p{}^1,\ {}^1{}_r\varkappa_p{}^{-1};\ {}^2{}_r\varkappa_p{}^0,\ {}^2{}_r\varkappa_p{}^1,\ {}^2{}_r\varkappa_p{}^{-1},\ {}^2{}_r\varkappa_p{}^2,\ {}^2{}_r\varkappa_p{}^{-2}, \ldots,$$

so reicht es aus, die beiden unteren Indexe einfach wegzulassen, und statt der beiden oberen Indexe einen einzigen zu schreiben, wir setzen daher

$${}^n{}_r\varkappa_p{}^\lambda = x_p$$

und zur Abkürzung

$$\int_0^\pi P_\lambda{}^n(\cos\theta)\ P_v{}^u(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(\lambda+v)\varphi}}{r^{u-1}\dfrac{\partial r}{\partial w}}\, d\varphi = f_0(m, p),$$

so dass wir das aufzulösende System Gleichungen einfach darstellen können durch

$$1, \quad \overset{0}{\underset{\infty}{m}}\left| \sum_0^\infty{}^p f_0(m, p)\, x_p = \psi_m \right|.$$

Wäre in diesem Systeme die Anzahl der Unbekannten x_p sowohl wie die der Gleichungen endlich, so wäre der Werth irgend einer der Unbekannten, etwa x_k

$$2, \quad x_k = \frac{{}_0\alpha_k}{R}\psi_0 + \frac{{}_1\alpha_k}{R}\psi_1 + \ldots + \frac{{}_m\alpha_k}{R}\psi_m + \ldots$$

wenn R die Determinante des aufzulösenden Systemes Gleichungen und allgemein ${}_i\alpha_k$ den Coëfficienten von $f_0(i, k)$ in der Entwickelung von R bedeutet. Der Werth 2, für x_k

ändert aber seine Form nicht, wenn man die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten in dem aufzulösenden System Gleichungen um eine beliebige Anzahl vermehrt, sie muss daher auch noch gültig bleiben, wenn die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten in's Unendliche wächst.

Wäre das System 1, von der Art, dass $f_0(m, p) = 0$, so lange $m < p$, so lautete die Determinante dieses Systemes

$$R = \begin{vmatrix} f_0(0,0) & f_0(0,1) & f_0(0,2) \dots \\ 0 & f_0(1,1) & f_0(1,2) \dots \\ 0 & 0 & f_0(2,2) \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$= f_0(0,0) \cdot f_0(1,1)\, f_0(2,2)\, f_0(3,3) \dots$$

und nach 2, wäre nun der Werth der Unbekannten x_p

$$x_p = \frac{1}{f_0(p,p)} \Big\{ \psi_p$$

$$- \psi_{p+1} \frac{f_0(p,p+1)}{f_0(p+1,p+1)}$$

$$+ \psi_{p+2} \left[\frac{f_0(p+1,p+2)}{f_0(p+2,p+2)} \frac{f_0(p,p+1)}{f_0(p+1,p+1)} - \frac{f_0(p,p+2)}{f_0(p+2,p+2)} \right]$$

$$- \psi_{p+3} \left\{ \frac{f_0(p+2,p+3)}{f_0(p+3,p+3)} \left(\frac{f_0(p+1,p+2)}{f_0(p+2,p+2)} \frac{f_0(p,p+1)}{f_0(p+1,p+1)} - \frac{f_0(p,p+2)}{f_0(p+2,p+2)} \right) \right.$$

$$\left. - \frac{f_0(p+1,p+3)}{f_0(p+3,p+3)} \frac{f_0(p,p+1)}{f_0(p+1,p+1)} + \frac{f_0(p,p+3)}{f_0(p+3,p+3)} \right\}$$

$$\pm \dots \dots \dots$$

Es wäre also

$$x_p = \frac{1}{f_0(p,p)} \Big\{ {}_pB_p\, \psi_p - {}_pB_{p+1}\, \psi_{p+1} + {}_pB_{p+2}\, \psi_{p+2} \mp \dots$$

$$+ (-1)^m\, {}_pB_{p+m}\, \psi_{p+m} \dots \Big\},$$

wenn

$${}_pB_p = 1$$

$${}_pB_{p+1} = \frac{1}{f_0(p+1,p+1)} \left[{}_pB_p\, f_0(p,p+1) \right]$$

$${}_pB_{p+2} = \frac{1}{f_0(p+2,p+2)} \left[{}_pB_{p+1}\, f_0(p+1,p+2) - {}_pB_p f_0(p,p+2) \right]$$

$$ {}_pB_{p+3} = \frac{1}{f_0(p+3,p+3)} [{}_pB_{p+2}\, f_0(p+2,p+3) - {}_pB_{p+1} f_0(p+1,p+3) + {}_pB_p\, f_0(p,p+3)] $$

. . . .

$$ \begin{aligned} {}_pB_{p+m} = \frac{1}{f_0(p+m,p+m)} [& {}_pB_{p+m-1}\, f_0(p+m-1, p+m) \\ & - {}_pB_{p+m-2}\, f_0(p+m-2, p+m) \\ & + {}_pB_{p+m-3}\, f_0(p+m-3, p+m) \mp \dots \\ & + (-1)^{m-2}\, {}_pB_{p+1}\, f_0(p+1, p+m) \\ & + (-1)^{m-1}\, {}_pB_p\, f_0(p, p+m)]. \end{aligned} $$

Hieraus ersehen wir, dass, wenn es möglich ist, das vorgelegte System Gleichungen so umzuformen, dass $f_0(m,p)$ verschwindet, so lange $m < p$, auch die Auflösung des Systemes keine Schwierigkeit mehr darbietet.

Zum Behuf dieser Umformung lassen wir die erste Gleichung des Systemes 1, unverändert, setzen aber

$$ f_0(0,p) = f_0(p); \ \psi_0 = \varphi_0. $$

Wir multipliciren ferner die 0te Gleichung des Systemes 1, mit λ_1^1, addiren die dadurch entstehende neue Gleichung zur 1ten und bestimmen nun den Factor λ_1^1 so, dass in der neuen Gleichung der Coëfficient von x_0 verschwindet, diess geschieht, wenn

$$ \lambda_1^1 f_0(0) + f_0(1,0) = 0 = f_1(0). $$

Den Coëfficienten von x_p in der neuen Gleichung, nämlich $\lambda_1^1 f_0(p) + f_0(1,p)$ setzen wir gleich $f_1(p)$ und schreiben für die rechte Seite der Gleichung, nämlich für $\lambda_1^1 \varphi_0 + \psi_1$ einfach φ_1.

Wir multipliciren ferner die 0te Gleichung des gegebenen Systemes mit λ_1^2, die eben transformirte mit λ_2^2 und addiren die so entstandenen Producte zur 2ten Gleichung des Systemes 1; die Werthe von λ_2^2 und λ_1^2 bestimmen wir durch die Bedingung, dass in der neu entstandenen Gleichung die Coëfficienten von x_0 und x_1 verschwinden, diess erfolgt, wenn

$$ \lambda_1^2 f_0(0) + f_0(2,0) = 0 $$
$$ \lambda_2^2 f_1(1) + \lambda_1^2 f_0(1) + f_0(2,1) = 0 = f_2(1), $$

während in der neu entstandenen Gleichung allgemein der

Coëfficient von x_p, nämlich $\lambda_2^2 f_1(p) + \lambda_1^2 f_0(p) + f_0(2,p)$ mit $f_2(p)$ und die rechte Seite, nämlich $\psi_2 + \lambda_2^2 \varphi_1 + \lambda_1^2 \varphi_0$ mit φ_2 bezeichnet werden möge.

Wir fahren in der angegebenen Weise zu transformiren weiter fort, und erhalten zur Transformation der 3ten Gleichung des Systemes 1, die neuen Gleichungen:

$$\lambda_1^3 f_0(0) + f_0(3,0) = 0$$
$$\lambda_2^3 f_1(1) + \lambda_1^3 f_0(1) + f_0(3,1) = 0$$
$$\lambda_3^3 f_2(2) + \lambda_2^3 f_1(2) + \lambda_1^3 f_0(2) + f_0(3,2) = 0 = f_3(2)$$
$$f_3(p) = \lambda_3^3 f_2(p) + \lambda_2^3 f_1(p) + \lambda_1^3 f_0(p) + f_0(3,p)$$
$$\varphi_3 = \psi_3 + \lambda_3^3 \varphi_2 + \lambda_2^3 \varphi_1 + \lambda_1^3 \varphi_0.$$

Wir setzen diese Transformation so weit als möglich fort und erhalten zur Bestimmung der Hülfsgrössen λ mit demselben oberen Index n das System Gleichungen:

$$\lambda_n^n f_{n-1}(n-1) + \lambda_{n-1}^n f_{n-2}(n-1) + \lambda_{n-2}^n f_{n-3}(n-1) + \cdots$$
$$+ \lambda_1^n f_0(n-1) + f_0(n,n-1) = 0$$
$$\lambda_{n-1}^n f_{n-2}(n-2) + \lambda_{n-2}^n f_{n-3}(n-2) + \cdots$$
$$+ \lambda_1^n f_0(n-2) + f_0(n,n-2) = 0$$
$$\lambda_{n-2}^n f_{n-3}(n-3) + \cdots$$
$$+ \lambda_1^n f_0(n-3) + f_0(n,n-3) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_1^n f_0(0) + f_0(n,0) = 0,$$

oder, wie wir hierfür kürzer schreiben:

$$\begin{array}{c|c|} 0 & \\ m & \sum\limits_{0}^{n-1}{}_p f_{n-p-1}(n-1-m)\,\lambda_{n-p}^n = -f_0(n,n-1-m) \\ n-1 & \end{array}$$

$$f_{n-p-1}(n-1-m) = 0 \text{ so lange } n-1-m < n-p-1.$$

Dieses System Gleichungen ist also von der Art wie das oben aufgelöste, und wir erhalten daher im vorliegenden Falle für den Werth einer der Unbekannten λ_{n-p}^n

$$\lambda_{n-p}^n = \frac{-1}{f_{n-p-1}(n-p-1)} [{}_{n-p}C_{n-p-1} f_0(n,n-p-1)$$
$$- {}_{n-p}C_{n-p-2} f_0(n,n-p-2) \pm \cdots + (-1)^{n-p-1} {}_{n-p}C_0\, f_0(n,0)],$$

wenn

$${}_{n-p}C_{n-p-1} = 1$$
$${}_{n-p}C_{n-p-2} = {}_{n-p}C_{n-p-1} \frac{f_{n-p-2}(n-p-1)}{f_{n-p-2}(n-p-2)}$$

$$2,\quad {}_{n-p}C_{n-p-3} = {}_{n-p}C_{n-p-2}\,\frac{f_{n-p-3}(n-p-2)}{f_{n-p-3}(n-p-3)} - {}_{n-p}C_{n-p-1}\,\frac{f_{n-p-3}(n-p-1)}{f_{n-p-3}(n-p-3)}\,.$$

. . . .

$${}_{n-p}C_{n-p-q} = \frac{1}{f_{n-p-q}(n-p-q)}\Big[{}_{n-p}C_{n-p-q+1}\,f_{n-p-q}(n-p-q+1) - {}_{n-p}C_{n-p-q+2}\,f_{n-p-q}(n-p-q+2) \;\ldots\; + (-1)^q\,{}_{n-p}C_{n-p-1}\,f_{n-p-q}(n-p-1)\Big].$$

Nach der oben festgestellten Definition von $f_n(q)$ und φ_n ist ferner

$$f_n(q) = f_0(n,q) + \lambda_1{}^n f_0(q) + \lambda_2{}^n f_1(q) + \lambda_3{}^n f_2(q) + \ldots + \lambda_n{}^n f_{n-1}(q)$$
$$\varphi_n = \psi_n + \lambda_n{}^n \varphi_{n-1} + \lambda_{n-1}{}^n \varphi_{n-2} + \ldots + \lambda_2{}^n \varphi_1 + \lambda_1{}^n \varphi_0\,.$$

Führen wir nun in diese beiden Gleichungen die eben berechneten Werthe der λ ein, so können wir sagen: Setzt man in dem vorgelegten System 1,

$$3,\quad \begin{aligned} f_n(q) &= f_0(n,q) \\ &-f_0(n,0)\Big[{}_1C_0\frac{f_0(q)}{f_0(0)} - {}_2C_0\frac{f_1(q)}{f_1(1)} + {}_3C_0\frac{f_2(q)}{f_2(2)} \mp \ldots + (-1)^{n-1}\,{}_nC_0\frac{f_{n-1}(q)}{f_{n-1}(n-1)}\Big] \\ &+f_0(n,1)\Big[\qquad - {}_2C_1\frac{f_1(q)}{f_1(1)} + {}_3C_1\frac{f_2(q)}{f_2(2)} \mp \ldots + (-1)^{n-1}\,{}_nC_1\frac{f_{n-1}(q)}{f_{n-1}(n-1)}\Big] \\ &-f_0(n,2)\Big[\qquad + {}_3C_2\frac{f_2(q)}{f_2(2)} \mp \ldots + (-1)^{n-1}\,{}_nC_2\frac{f_{n-1}(q)}{f_{n-1}(n-1)}\Big] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &-(-1)^n f_0(n,n-1)\Big[\qquad + (-1)^{n-1}\,{}_nC_{n-1}\frac{f_{n-1}(q)}{f_{n-1}(n-1)}\Big] \end{aligned}$$

$$4,\quad \begin{aligned} \varphi_n &= \psi_n \\ &-f_0(n,0)\Big[{}_1C_0\frac{\varphi_0}{f_0(0)} - {}_2C_0\frac{\varphi_1}{f_1(1)} + {}_3C_0\frac{\varphi_2}{f_2(2)} \mp \ldots + (-1)^{n-1}\,{}_nC_0\frac{\varphi_{n-1}}{f_{n-1}(n-1)}\Big] \\ &+f_0(n,1)\Big[\qquad - {}_2C_1\frac{\varphi_1}{f_1(1)} + {}_3C_1\frac{\varphi_2}{f_2(2)} \mp \ldots + (-1)^{n-1}\,{}_nC_1\frac{\varphi_{n-1}}{f_{n-1}(n-1)}\Big] \\ &-f_0(n,2)\Big[\qquad + {}_3C_2\frac{\varphi_2}{f_2(2)} \mp \ldots + (-1)^{n-1}\,{}_nC_2\frac{\varphi_{n-1}}{f_{n-1}(n-1)}\Big] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &-(-1)^n f_0(n,n-1)\Big[\qquad + (-1)^{n-1}\,{}_nC_{n-1}\frac{\varphi_{n-1}}{f_{n-1}(n-1)}\Big], \end{aligned}$$

so geht dieses System über in das neue

$$5, \quad \sum_{0}^{\infty}{}_p f_m(p)\, x_p = \varphi_m$$

$$f_m(p) = 0 \text{ so lange } p < m$$

und hat daher zur Lösung

$$6, \quad x_p = \frac{1}{f_p(p)} \left\{ {}_pA_p\, \varphi_p - {}_pA_{p+1}\, \varphi_{p+1} + {}_pA_{p+2}\, \varphi_{p+2} \mp \cdots \cdots + (-1)^m\, {}_pA_{p+m}\, \varphi_{p+m} + \cdots \cdots \right\},$$

wobei

$${}_pA_p = 1$$

$${}_pA_{p+1} = {}_pA_p \frac{f_p(p+1)}{f_{p+1}(p+1)}$$

$$7, \quad {}_pA_{p+2} = \frac{1}{f_{p+2}(p+2)} \Big[{}_pA_{p+1} f_{p+1}(p+2) - {}_pA_p f_p(p+2) \Big]$$

. . . .

$${}_pA_{p+m} = \frac{1}{f_{p+m}(p+m)}$$

$$\Big[{}_pA_{p+m-1} f_{p+m-1}(p+m) - {}_pA_{p+m-2} f_{p+m-2}(p+m) \pm \cdots \cdots + (-1)^{m-2}\, {}_pA_{p+1} f_{p+1}(p+m) + (-1)^{m-1}\, {}_pA_p f_p(p+m) \Big].$$

Durch die Gleichungen 2, 3, 4, 5, 6, und 7, ist nun die Auflösung des Systemes unendlich vieler linearer Gleichungen 1, geschehen in dem Sinne, wie diese Lösung im Anfange dieses Paragraphen verlangt wurde, nämlich so, dass man die gesuchten Unbekannten ${}^n{}_r x_p{}^\lambda$ bis auf einen beliebig gegebenen Genauigkeitsgrad berechnen kann.

Sehr einfach gestaltet sich die Rechnung, wenn das gegebene System 1, schon von vorn herein die Form des Systemes 5, besitzt. Diess findet z. B. statt, wenn die zu behandelnde Leiteroberfläche eine Kugelfläche ist. Hat diese nämlich den Radius a, so ist für ein Coordinatensystem, dessen Pol im Kugelmittelpunkte liegt:

$$f_0(m, p) = \int_0^\pi P_\lambda{}^n(\cos\vartheta) P_\nu{}^u(\cos\vartheta) \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(\lambda+\nu)\varphi}}{a^{u-1}}\, d\varphi$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2\pi}{a^{u-1}} \displaystyle\int_0^\pi P_\lambda{}^n(\cos\theta)\, P_\lambda{}^u(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta & \text{wenn } \lambda = -v \\ 0 & \text{,,} \quad \lambda \gtrless -v \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2\pi}{a^{u-1}} \cdot (-1)^\lambda \cdot \dfrac{2}{2n+1} \dfrac{\Pi(n+\lambda)\,\Pi(n-\lambda)}{(1.3.5\ldots\overline{2n-1})^2} & \text{wenn } n = u,\ \lambda = -v \\ 0 & \text{,,} \quad n \gtrless u,\ \lambda \gtrless -v. \end{cases}$$

Die linke Seite der v, u^{ten} Gleichung des Systemes VI. §. 1. enthält also nur das eine in die Uebekannte ${}^u{}_r\varkappa_p{}^{-v}$ multiplicirte Glied und demnach ist

$${}^u{}_r\varkappa_p{}^{-v} = (-1)^\lambda \frac{a^{u-1}}{4\pi} \cdot (2n+1) \frac{(1.3.5\ldots\overline{2n-1})^2}{\Pi(n+\lambda)\,\Pi(n-\lambda)} \cdot {}_v\psi_u.$$

Man vergleiche hierzu das Resultat in der Gleichung 8, §. 5. Cap. III.

Im allgemeinen Falle, wenn also über die Functionen $f_0(m,p)$ keine vereinfachenden Bedingungen vorliegen, wächst die Arbeit des Rechnens vorwiegend mit der complicirteren Form dieser Functionen. Es möge desswegen hier noch auf eine Reihe von Vereinfachungen hingewiesen werden, die man mit jenen Functionen vornehmen kann.

Die Coëfficienten

$$f_0(m,p) = \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} \frac{P_\lambda{}^n(\cos\theta)\, P_v{}^u(\cos\theta)\, e^{i(\lambda+v)\varphi}}{r^{u-1} \dfrac{\partial r}{\partial w}}\, d\varphi$$

sind nichts anderes als die Coëfficienten gewisser Entwickelungen nach Kugelfunctionen. Stellt nämlich in der Gleichung

$$\frac{P_v{}^u(\cos\theta)\, e^{iv\varphi}}{r^{u-1} \dfrac{\partial r}{\partial w}} = \sum_0^\infty{}_m \sum_{-m}^{+m}{}_\mu\ {}^u{}_vA_\mu{}^m\, P_\mu{}^m(\cos\theta)\, e^{-i\mu\varphi}$$

die rechte Seite die Entwickelung der linken nach Kugelfunctionen dar, so erhält man, wenn man sie statt der linken in die vorige Gleichung substituirt und die Integrationen ausführt

$$f_0(m,p) = (-1)^\lambda \frac{2}{2n+1} \frac{\Pi(n+\lambda)\,\Pi(n-\lambda)}{(1.3.5\ldots\overline{2n-1})^2}\ {}^u{}_vA_\lambda{}^n,$$

wodurch das eben behauptete bewiesen ist.

Es sei ferner zur Abkürzung

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{i(\lambda+r)\varphi}\, d\varphi}{r^{\lambda-1}\frac{\partial r}{\partial w}} = \psi(v, u, \lambda),$$

also

$$f_0(m, p) = \int_0^{\pi} \psi(v, u, \lambda)\, P_\lambda{}^n(\cos\theta)\, P_v{}^u(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta.$$

Substituirt man unter dem Integralzeichen den Werth von

$$P_m{}^n(\cos\theta) = i^m \sin^m\theta$$

$$\left\{\cos^{n-m}\theta - \frac{n-m.\,n-m-1}{2.\,2n-1} \cos^{n-m-2}\theta + \cdots\right\} = P_{-m}{}^n(\cos\theta),$$

so erkennt man, dass der Coëfficient von

$$\int_0^{\pi} \psi(v, u, \lambda)\, P_v{}^u(\cos\theta)\, i^0 \sin^0\theta \sin\theta\, d\theta$$

auf der linken Seite des Systemes VI. §. 1. lautet

$${}^0{}_r\varkappa_p{}^0 - \frac{2.\,1}{2.\,3}\,{}^2{}_r\varkappa_p{}^0 + \frac{4.3.2.1}{2.4.7.5}\,{}^4{}_r\varkappa_p{}^0 - \frac{6.5.4.3.2.1}{2.4.6.11.9.7.}\,{}^6{}_r\varkappa_p{}^0 \pm \cdots = {}^0{}_r a_p{}^0,$$

ferner der Coëfficient von

$$\int_0^{\pi} \psi(v, u, m)\, P_v{}^u(\cos\theta)\, i^m \sin^m\theta \sin\theta\, d\theta$$

$${}^m{}_r\varkappa_p{}^m - \frac{2.\,1}{2.2m+3}\,{}^{m+2}{}_r\varkappa_p{}^m + \frac{4.3.2.1}{2.4.2m+7.2m+5}\,{}^{m+4}{}_r\varkappa_p{}^m \mp \cdots = {}^0{}_r a_p{}^m,$$

der Coëfficient von

$$\int_0^{\pi} \psi(v, u, m)\, P_v{}^u(\cos\theta)\, i^m \sin^m\theta \cos\theta \sin\theta\, d\theta$$

$${}^{m+1}{}_r\varkappa_p{}^m - \frac{3.\,2}{2.\,2m+5}\,{}^{m+3}{}_r\varkappa_p{}^m + \frac{5.\,4.\,3.\,2}{2.\,4.\,2m+9.\,2m+7}\,{}^{m+5}{}_r\varkappa_p{}^m \mp \cdots = {}^1{}_r a_p{}^m,$$

der Coëfficient von

$$\int_0^{\pi} \psi(v, u, m)\, P_v{}^u(\cos\theta)\, i^m \sin^m\theta \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta$$

$$ {}^{m+2}{}_r\varkappa_p{}^m - \frac{4.3}{2.2m+7}\, {}^{m+4}{}_r\varkappa_p{}^m $$

$$ + \frac{6.5.4.3}{2.4.2m+11.2m+9}\, {}^{m+6}{}_r\varkappa_p{}^m \mp \ldots = {}^2{}_r a_p{}^m $$

. . . .

Führt man daher die eben definirten a als neue Unbekannte in das System Gleichungen 1, oder VI, §. 1. ein, so vereinfacht sich $f_0(m,p)$ zu

$$ 8, \quad f_0(m,p) = \int_0^\pi \psi(v,u,\lambda)\, P_v{}^u(\cos\theta)\, i^\lambda \sin^\lambda\theta \cos^n\theta \sin\theta\, d\theta. $$

Hat man die a berechnet, so sind dann noch vermittelst der eben aufgestellten Definitionsgleichungen die $\varkappa$ zu berechnen. Diese Berechnung kann aber sehr leicht erfolgen, weil in jeder einzelnen der Definitionsgleichungen die gesuchten Unbekannten $\varkappa$ denselben rechten oberen Index besitzen, das ganze aufzulösende System Gleichungen also in so viel einzelne einfachere Systeme zerfällt, als es verschiedene rechte obere Indices giebt. In jedem dieser einzelnen Systeme besitzt ferner jede einzelne Gleichung nur solche Unbekannte $\varkappa$, deren linker oberer Index entweder durchaus gerade, oder durchaus ungerade ist. Jedes einzelne der vorhin genannten Systeme zerfällt also wiederum in je zwei Systeme, von denen das eine nur solche $\varkappa$ enthält, deren linker oberer Index gerade ist, das andere nur solche $\varkappa$, deren linker oberer Index ungerade ist. Endlich hat noch jedes dieser einzelnen Systeme die Form

$$ \begin{array}{c} 0 \\ m \\ \infty \end{array} \Big| \sum_0^\infty{}_p f_m(p)\, x_p = \varphi_m \quad \Big| f_m(p) = 0 \text{ so lange } p < m, $$

also die Form des Systemes 5, dessen Auflösung durch 6, und 7, ohne weiteres gegeben ist.

Ist die Leiteroberfläche, auf welche sich das System VI, §. 1. bezieht, eine Rotationsfläche, deren geometrische Axe wir zur Polaraxe wählen können, so ist r und $\frac{\partial r}{\partial w}$ von φ unabhängig und

$$ \psi(v,u,\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \lambda + v \gtrless 0 \\ 2\pi & \text{,, } \lambda + v = 0. \end{cases} $$

Da ferner $P_{-v}^n = P_{+v}^n$, so werden die linken Seiten des Systemes VI, einfach zu

$$\left. \begin{matrix} 0 \\ v,u \\ \infty \end{matrix} \right| \sum_0^\infty {}_n {}^n{}_r\varkappa_p^{-v} \, 2\pi \int_0^\pi \frac{P_v^n(\cos\theta)\, P_v^u(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta}{r^{u-1}\, \frac{\partial r}{\partial w}} .$$

Verschwinden nun auch alle die rechten Seiten des Systemes VI, für welche v von Null verschieden ist, so genügt man dem Systeme VI, wenn man sämmtliche ${}^n{}_r\varkappa_p^{-v}$, deren v von Null verschieden ist, gleich Null setzt und die so angenommenen Werthe der $\varkappa$ müssen auch die einzig richtigen sein, weil sich aus dem System VI, für jedes $\varkappa$ nur ein einziger Werth herausstellt, der dem System genügt. Der genannte Fall des Verschwindens der rechten Seiten tritt aber ein, wenn sämmtliche gegebene Leiteroberflächen Rotationsflächen derselben geometrischen Rotationsaxe sind und die auf den Nichtleitern haftenden elektrischen Massen dieselbe Rotationsaxe zur Symmetrieaxe besitzen.

Setzen wir nun in diesem letzteren Falle, indem wir ähnlich verfahren wie vorhin, wo wir zur Gleichung 8, gelangten

$${}^n{}_r\varkappa_p^0 \cdot \frac{\Pi(n)}{1.3.\ldots.\overline{2n-1}} = {}^n{}_r\varkappa_p$$

$${}^0{}_r\varkappa_p - \frac{1^2}{1.3}\, {}^2{}_r\varkappa_p + \frac{1^2.3^2}{1.3.5.7} \cdot {}^4{}_r\varkappa_p - \frac{1^2.3^2.5^2}{1.3.5.7.9.11} \cdot {}^6{}_r\varkappa_p \pm \cdots = {}^0{}_r a_p$$

$${}^1{}_r\varkappa_p - \frac{2^2}{3.5}\, {}^3{}_r\varkappa_p + \frac{2^2.4^2}{3.5.7.9} \cdot {}^5{}_r\varkappa_p - \frac{2^2.4^2.6^2}{3.5.7.9.11.13} \cdot {}^7{}_r\varkappa_p \pm \cdots = {}^1{}_r a_p$$

$${}^2{}_r\varkappa_p - \frac{3^2}{5.7}\, {}^4{}_r\varkappa_p + \frac{3^2.5^2}{5.7.9.11} \cdot {}^6{}_r\varkappa_p \mp \cdots = {}^2{}_r a_p$$

$${}^3{}_r\varkappa_p - \frac{4^2}{7.9}\, {}^5{}_r\varkappa_p + \frac{4^2.6^2}{7.9.11.13} \cdot {}^7{}_r\varkappa_p \mp \cdots = {}^3{}_r a_p$$

. . . . ,

also

$${}^{2n}{}_r\varkappa_p = {}^{2n}{}_r a_p + \frac{(2n+1)^2}{(4n+1)(4n+3)}\, {}^{2n+2}{}_r a_p$$

$${}^{2n+1}{}_r\varkappa_p = {}^{2n+1}{}_r a_p + \frac{(2n+2)^2}{(4n+3)(4n+5)}\, {}^{2n+3}{}_r a_p ,$$

so wird



$$9,\quad f_0(m,n) = 2\pi \int_0^\pi \frac{\cos{}^n\theta\, P_0{}^m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta}{r^{m-1}\frac{\partial r}{\partial w}}.$$

Endlich mögen hier noch einige Betrachtungen Erwähnung finden, die zweckmässig zur Transformation der rechten Seiten des Systemes 1, verwendet werden und sonst auch auf eine bequeme andere Auflösung der Gleichungensysteme führen können als im Anfange dieses Paragraphen allgemein mitgetheilt worden ist. Die rechten Seiten der Systeme I, II, III, IV, V, VI enthalten die Potentialfunctionen elektrischer Massen, die ausserhalb der Kugel mit dem Radius a_p liegen, auf Punkte dieser Kugel. Es habe irgend ein solcher hierher gehöriger Massenpunkt die elektrische Masse m und die Entfernung $c > a_p$ vom Mittelpunkt der Kugel, alsdann ist die Potentialfunction dieses Massenpunktes auf irgend einen Punkt der Kugel, dessen Breite ${}_p\theta_p$ ist

$$\frac{m}{\sqrt{c^2 + a_p{}^2 - 2a_p\, c\cos{}_p\theta_p}},$$

wenn die Polaraxe unseres Coordinatensystemes zugleich mit durch den Massenpunkt m geht. Diese Potentialfunction kann aber auf die Form gebracht werden

$$\frac{\frac{a_p}{c}\, m}{\sqrt{\left(\frac{a_p{}^2}{c}\right)^2 + a_p{}^2 - 2\frac{a_p{}^2}{c}\, a_p \cos{}_p\theta_p}}$$

Die Vergleichung dieser beiden Formen derselben Potentialfunction liefert aber sofort den Satz:

Die Potentialfunction eines Punktes ausserhalb (oder innerhalb) einer Kugelfläche vom Radius a_p in der Entfernung c $\left(\text{oder } \frac{a_p{}^2}{c}\right)$ vom Kugelmittelpunkt auf irgend einen Punkt der Kugelfläche ist ebenso gross, wie die Potentialfunction eines Punktes innerhalb (oder ausserhalb) der Kugelfläche, dessen Masse aber das $\frac{a_p}{c}$ $\left(\text{oder } \frac{c}{a_p}\right)$fache der Masse des ersteren Punktes ist, und der auf dem nach diesem Punkte gerichteten Leitstrahl in der Ent-

fernung $\frac{a^2 p}{c}$ (oder c) vom Kugelmittelpunkte gelegen ist.

Mit Beziehung auf den Begriff des elektrischen Bildes eines Punktes (vergl. Cap. III. §. 5. am Ende) kann dieser Satz kurz so ausgesprochen werden: Die Potentialfunctionen eines elektrischen Massenpunktes und seines elektrischen Bildes auf Punkte der zugehörigen Kugelfläche sind einander entgegengesetzt gleich.

Setzen wir statt des elektrischen Massenpunktes die Masse $\varrho\, d\sigma$ eines Oberflächenelementes $d\sigma$ eines ausserhalb der Kugel gelegenen Leiters, so entsteht durch Gleichsetzung der vorigen beiden Formen für dieselbe Potentialfunction

$$\frac{\varrho\, d\sigma}{\sqrt{r^2 + a_p^2 - 2 a_p r \cos\theta}} = \frac{\frac{a_p}{r}\varrho\, d\sigma}{\sqrt{\left(\frac{a_p^2}{r}\right)^2 + a_p^2 - 2 a_p \frac{a_p^2}{r}\cos\theta}}$$

Diese Gleichung gilt nothwendig auch noch, wenn das Oberflächenelement $d\sigma$ nicht auf der Polaraxe selbst gelegen ist, um diess anzudeuten, schreiben wir γ statt θ und setzen zugleich in leicht verständlicher Weise

$$d\sigma = r^2 \frac{1}{\frac{\partial r}{\partial w}} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Damit entsteht aber aus der vorigen Gleichung:

$$\frac{\varrho\, r^2 \frac{1}{\frac{\partial r}{\partial w}} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\sqrt{r^2 + a_p^2 - 2 a_p r\cos\gamma}} = \frac{\left(\frac{r}{a_p}\right)^3 \varrho \left(\frac{a_p^2}{r}\right)^2 \frac{1}{\frac{\partial r}{\partial w}} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.}{\sqrt{\left(\frac{a_p^2}{r}\right)^2 + a_p^2 - 2 a_p \frac{a_p^2}{r}\cos\gamma}}$$

Integriren wir beiderseits im Bezug auf φ und θ zwischen solchen Grenzen, dass linker Hand die Potentialfunction des ganzen Leiters entsteht, so besteht auch jetzt noch die Gleichung

$$10, \qquad \int_{\theta_0}^{\theta'}\int_{\varphi_0}^{\varphi'} \frac{\varrho\, r^2 \frac{1}{\frac{\partial r}{\partial w}} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\sqrt{r^2 + a_p^2 - 2 a_p r\cos\gamma}}$$

$$= \int\limits_{\theta_0}^{\theta'} \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi'} \frac{\left(\frac{r}{a_p}\right)^3 \varrho \left(\frac{a_p^2}{r}\right)^2 \frac{1}{\frac{\partial r}{\partial w}} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{a_p^2}{r}\right)^2 + a_p^2 - 2\, a_p \frac{a_p^2}{r} \cos\gamma}}.$$

Denken wir uns nun statt der gegebenen Leiterfläche eine andere gesetzt, die dadurch entsteht, dass wir statt des Radiusvectors r irgend eines Punktes der gegebenen Leiteroberfläche $\frac{a_p^2}{r} = r'$ setzen, die also vollständig innerhalb der Kugel mit dem Radius a_p liegt, so sind in räumlichen Polarcoordinaten ausgedrückt die Cosinus der Winkel, welche die Radienvectoren mit den drei rechtwinkligen Axen der $x\,y$ und z einschliessen:

$$\cos(r, x) = \cos\theta;\ \cos(r, y) = \sin\theta\cos\varphi;\ \cos(r, z) = \sin\theta\sin\varphi$$
$$\cos(r', x) = \cos\theta;\ \cos(r', y) = \sin\theta\cos\varphi;\ \cos(r', z) = \sin\theta\sin\varphi,$$

und die Cosinus der Winkel, welche die resp. Normalen N und N' in den beiden einander entsprechenden Punkten beider Flächen mit denselben Axen der $x\,y$ und z bilden

$$\cos(N, x) = \frac{\frac{\partial F}{\partial r}\cos\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\sin\theta}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2}}$$

$$\cos(N, y) = \frac{\frac{\partial F}{\partial r}\cos\varphi\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\cos\varphi\cos\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\sin\varphi}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2}}$$

$$\cos(N, z) = \frac{\frac{\partial F}{\partial r}\sin\varphi\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\sin\varphi\cos\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\cos\varphi}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2}}$$

Hieraus ergiebt sich einfach $\cos(N', x)$, $\cos(N', y)$ und $\cos(N', z)$, indem man rechter Hand in den entsprechenden Formeln allenthalben r' statt r setzt.

Führt man nun in die letzteren so erhaltenen Gleichungen die Relation ein, nach welcher r und r' von einander abhängen, setzt also

$$r' = \frac{ap^2}{r} \text{ und } \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial r'}\frac{\partial r'}{\partial r} \text{ also } \frac{\partial F}{\partial r'} = -\frac{\partial F}{\partial r}\frac{r^2}{ap^2},$$

so erhält man

$$\cos(N', x) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\sin\theta}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2}}$$

$$\cos(N', y) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial r}\cos\varphi\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\cos\varphi\cos\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\sin\varphi}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2}}$$

$$\cos(N', z) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial r}\sin\varphi\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\sin\varphi\cos\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\cos\varphi}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2}}$$

Bildet man nun, um die Cosinus der Winkel δ und δ' zu erhalten, die von den Normalen N und N' mit den zugehörigen Radienvectoren r und r' eingeschlossen werden

$$\cos\delta = \frac{\partial r}{\partial w} = \cos(r, x)\cos(N, x) + \cos(r, y)\cos(N, y) + \cos(r, z)\cos(N, z)$$

$$\cos\delta' = \cos(r', x)\cos(N', x) + \cos(r', y)\cos(N', y) + \cos(r', z)\cos(N', z)$$

so entsteht

$$\cos\delta = \frac{\partial r}{\partial w} = \frac{\frac{\partial F}{\partial r}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2}} = -\cos\delta'.$$

Beachten wir nur die absoluten Werthe von $\cos\delta$ und $\cos\delta'$, was wir dann thun können, wenn wir unter δ und δ' immer die spitzen Winkel verstehen die von den Normalen und den Radienvectoren eingeschlossen werden, so können wir setzen

$$\cos\delta = \cos\delta' = \frac{\partial r}{\partial w} = \frac{\partial r'}{\partial w'}.$$

Sind ferner A, B und C drei Punkte der gegebenen Leiteroberfläche, denen die Punkte $a\,b\,c$ der neu zu bildenden Fläche entsprechen, und sind die Radienvectoren von A, B, C der Reihe nach r_1, r_2, r_3, so sind die von abc $\frac{ap^2}{r_1}$, $\frac{ap^2}{r_2}$, $\frac{ap^2}{r_3}$ und es gilt nun die Proportion

$$\frac{ap^2}{r_1} : \frac{ap^2}{r_2} : \frac{ap^2}{r_3} = r_3 : r_2 : r_1,$$

aus der weiter wegen der Aehnlichkeit der entstehenden Dreiecke folgt:

$$\overline{AB} : \overline{ab} = r_2 : \frac{ap^2}{r_1} = r_1 : \frac{ap^2}{r_2}$$

$$\overline{BC} : \overline{bc} = r_2 : \frac{ap^2}{r_3} = r_3 : \frac{ap^2}{r_1}$$

$$\overline{CA} : \overline{ca} = r_1 : \frac{ap^2}{r_3} = r_3 : \frac{ap^2}{r_1}.$$

Rücken nun die Punkte ABC und demnach auch abc einander unendlich nahe und ist demzufolge $\overline{AB} = ds_1$, $\overline{BC} = ds_2$, $\overline{CA} = ds_3$, $\overline{ab} = d\sigma_1$, $\overline{bc} = d\sigma_2$, $\overline{ca} = d\sigma_3$, so folgt aus den eben hingeschriebenen Proportionen:

$$\frac{\frac{ds_1}{d\sigma_1}}{\frac{ds_2}{d\sigma_2}} = \frac{r_1}{r_3}; \quad \frac{\frac{ds_2}{d\sigma_2}}{\frac{ds_3}{d\sigma_3}} = \frac{r_2}{r_1}; \quad \frac{\frac{ds_3}{d\sigma_3}}{\frac{ds_1}{d\sigma_1}} = \frac{r_3}{r_2}.$$

Nun ist unter der gemachten Voraussetzung bis auf unendlich kleine Grössen

$$r_1 = r_2 = r_3,$$

demnach entsteht aus den letzten Gleichungen

$$ds_1 : ds_2 : ds_3 = d\sigma_1 : d\sigma_2 : d\sigma_3.$$

Es sind also auch die kleinsten Theile der neu gebildeten Fläche den kleinsten entsprechenden Theilen der gegebenen Leiterfläche ähnlich.

Wir sind demnach vollkommen berechtigt die Gleichung 10, umzuformen in die folgende

$$\int_{\theta_0}^{\theta'}\int_{\varphi_0}^{\varphi'} \frac{\varrho\, r^2 \frac{1}{\frac{\partial r}{\partial w}} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\sqrt{r^2 + a_p^2 - 2\, a_p\, r \cos\gamma}}$$

11,

$$= \int_{\theta_0}^{\theta'}\int_{\varphi_0}^{\varphi'} \frac{\varrho \left(\frac{r}{a_p}\right)^3 . r'^2 \frac{1}{\frac{\partial r'}{\partial w'}} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\sqrt{r'^2 + a_p^2 - 2\, a_p\, r' \cos\gamma}}$$

Nennen wir kurz eine Fläche, die aus einer gegebenen anderen entsteht, indem man anstatt des Radiusvectors r der gegebenen Fläche $\frac{a^2}{r}$ zum Radiusvector der neuen Fläche nimmt, das geometrische Bild der gegebenen Fläche im Bezug auf die Kugel mit dem Radius a, so können wir den in der Gleichung 11, enthaltenen Satz kurz so ausdrücken:

Die Potentialfunction einer gegebenen, mit Elektricität geladenen Fläche ausserhalb einer Kugel auf die Punkte der Kugelfläche ist ebenso gross, wie die Potentialfunction ihres geometrischen Bildes im Bezug auf dieselbe Kugel auf die Punkte der Kugel, wenn die elektrische Dichtheit der Bildfläche das $\left(\frac{r}{a}\right)^3$fache der elektrischen Dichtheit der ursprünglichen Fläche ist, wobei a den Radius der Kugel, r den Radiusvector, gerechnet vom Kugelcentrum an, bedeutet, der der gegebenen Fläche angehört und der zugleich durch den Punkt der Bildfläche geht, dessen Dichtheit das $\left(\frac{r}{a}\right)^3$fache der elektrischen Dichtheit des vorigen Punktes beträgt.

Ist die ursprünglich gegebene Fläche innerhalb der Kugel mit dem Radius a_p gelegen, so kommt man durch eine der angestellten Rechnung ganz analoge auf dieselbe

Gleichung 11, in der aber dann $r' = \frac{a^2}{r} \geq a$ einer Fläche angehört, die ausserhalb der Kugelfläche gelegen ist.

Nennen wir von zwei Flächen, die geometrische Bilder von einander sind, und bei welchen die elektrischen Dichtheiten sich entsprechender Punkte in dem Verhältniss $1:\left(\frac{r}{a}\right)^3$ stehen, die eine kurz das physikalische Bild der andern im Bezug auf die Kugel mit dem Radius a, so können wir die erlangten Resultate in den kurzen Satz zusammenfassen:

Zwei Flächen, von denen die eine das physikalische Bild der andern ist, haben auf denselben Punkt der zugehörigen Kugel dieselbe Potentialfunction.

Wir können von diesem Satze in folgenden Fällen eine zweckmässige Anwendung machen.

1) Wenn einer oder mehrere der gegebenen Leiter Höhlungen besitzen, innerhalb deren wiederum elektrische Massen entweder auf Leitern oder auf Nichtleitern vorhanden sind. Die in §. 1. gemachten Voraussetzungen über die Eigenschaften des in jedem Leiter anzuwendenden räumlichen Polarcoordinatensystemes würden hier im Allgemeinen eine mehrfache Zerlegung solcher Leiter nöthig machen, deren innere Höhlungen mit elektrischer Masse angefüllt sind. Durch Anwendung des eben dagewesenen Satzes können wir aber in folgender Weise kürzer verfahren. Unter Anwendung der Betrachtungen in §. 6. Cap. II. und des allgemeinen in §. 1. angegebenen Rechnungsganges bestimmen wir erst die Vertheilung der Elektricität innerhalb einer jeden einzelnen Höhlung und auf der die Höhlung begrenzenden Leiterfläche, indem wir die Potentialfunction der auf letzterer haftenden Elektricität vermehrt um die der innerhalb der Höhlung gegebenen oder auch auf Leitern vorhandenen elektrischen Massen gleich Null setzen. Hierzu aber verwenden wir den vorigen Satz, indem wir statt der die Höhlung begrenzenden Fläche deren geometrisches Bild setzen im Bezug auf eine Kugel, die ganz innerhalb des in der Höhlung gelegenen Leiters sich befindet und nun das

geometrische Bild so mit elektrischer Masse überdecken, dass seine Potentialfunction und die der Elektricität, welche auf dem innerhalb der Höhlung gelegenen Leiter haftet, für alle Punkte der Kugel einen gegebenen constanten Werth hat. Analoges gilt, wenn innerhalb der Höhlung mehrere Leiter oder auch Nichtleiter vorhanden sind.

In dieser Art behandeln wir jede einzelne Höhlung für sich und können hernach den ganzen Leiter wie einen massiven Leiter behandeln, auf dem sich aber nicht allein die ihm direct mitgetheilte Elektricitätsmenge befindet, sondern auch die Gesammtsumme der in den inneren Hohlräumen (nicht mit gerechnet die Elektricität auf den die Hohlräume begrenzenden Flächen) gegebenen Elektricitätsmengen.

2) Um eine Umrechnung der Coordinaten der verschiedenen auf den rechten Seiten des Systemes V, §. 1. angewandten Coordinatensysteme zu ersparen, kann man die Leiteroberflächen, auf denen man weiss, wie sich auf ihnen die Elektricität im Gleichgewichtszustande vertheilt, wenn sie isolirt wären, physikalisch abbilden im Bezug auf eine Kugel, die ganz innerhalb des gerade behandelten Leiters liegt, auf diesen Bildern hat man alsdann noch Elektricität so zu vertheilen, dass ihre Potentialfunction zugleich mit der der Elektricität auf der Leiteroberfläche, innerhalb welcher die Kugelfläche gelegen ist, für alle Punkte der Kugel einen gegebenen constanten Werth hnt.

Anmerkung: Es versteht sich von selbst, dass, nachdem die elektrische Dichtheit der physikalischen Bilder gefunden ist, wieder eine Zurückversetzung der elektrischen Ladung des Bildes auf die ursprüngliche Fläche zu erfolgen hat, was aber nach dem vorhergehenden Satze sehr leicht geschehen kann. Ausserdem mag noch bemerkt werden, dass in den beiden betrachteten Fällen, wo das geometrische Bild innerhalb der zugehörigen Kugelfläche liegt, die Entwickelung der reciproken Entfernung eines Punktes der Kugelfläche und eines Punktes der Bildfläche nach absteigenden Potenzen des Kugelradius zu erfolgen hat. Diess ändert aber an der Richtigkeit der ganzen Betrachtung des §. 1. und §. 3. nichts, da auch später wieder der Radius der

Kugelfläche ganz aus der Rechnung hinausfällt, wie man sich leicht überzeugen kann, wenn man die Rechnung in §. 1 unter Anwendung der Betrachtungen unter 1, und 2, wiederholt.

3) Weiss man, wie sich Elektricität im Gleichgewichtszustande über einen isolirten Leiter vertheilt, so ist durch das physikalische Bild dieser elektrischen Leiteroberfläche in Bezug auf irgend eine Kugel, die innerhalb des Leiters liegt, auch eine solche Vertheilung von Elektricität auf dem geometrischen Bilde der Leiteroberfläche im Bezug auf dieselbe Kugel gegeben, dass die Potentialfunction der Elektricität des geometrischen Bildes für alle Punkte derselben Kugel, im Bezug auf welche das geometrische Bild construirt wurde, denselben constanten Werth besitzt, den die Potentialfunction der elektrischen Leiteroberfläche für alle Punkte im Innern des Leiters hat. So weiss man z. B. aus §. 2. Cap. III., wie sich Elektricität im Gleichgewichtszustande über ein Ellipsoid vertheilt, daraus folgt dann leicht, nach welcher Art man Elektricität über das geometrische Bild eines Ellipsoides im Bezug auf eine im Innern des Ellipsoides gelegene Kugel zu verbreiten habe, damit diese Elektricität für alle Punkte dieser Kugel denselben constanten Werth der Potentialfunction aufweise.

4) Kann man umgekehrt auf irgend einer allseitig geschlossenen Fläche eine solche Vertheilung von Elektricität angeben, dass diese für alle Punkte einer diese Fläche vollständig umschliessenden Kugel denselben constanten Werth der Potentialfunction erzeugt, so ist das physikalische Bild dieser Fläche im Bezug auf dieselbe Kugel ebenfalls eine allseitig geschlossene Fläche, die aber die Kugel allseitig umschliesst und so mit Elektricität überdeckt ist, dass diese für alle Punkte im Innern der Fläche, auf der sie haftet, denselben constanten Werth der Potentialfunction besitzt, den die ursprüngliche elektrische Fläche für die Punkte der Kugel besass. Es befindet sich also die Elektricität des physikalischen Bildes der ursprünglichen Fläche im Zustande des Gleichgewichtes.

α) Denken wir uns eine Kugel b, mit dem Radius b, welche so mit Elektricität überdeckt ist, dass sie für alle

Punkte einer concentrischen sie umschliessenden Kugel a mit dem Radius a denselben Werth der Potentialfunction, nämlich α, besitzt, so ist, vergl. §. 3. Cap. I., die Kugel b mit Elektricität von gleichförmiger Dichtheit zu überdecken. Ist m die Gesammtmasse dieser Elektricität, so soll sein

$$\alpha = \frac{m}{a},$$

folglich ist $$m = a\alpha$$
und die gleichförmige Dichtheit der Elektricität auf der Kugel b ist

$$\frac{a\alpha}{4b^2\pi}.$$

Das geometrische Bild der Kugel b im Bezug auf die Kugel a ist wiederum eine concentrische Kugel R, mit dem Radius R, wo

$$R = \frac{a^2}{b}.$$

Um die Dichtheit der Elektricität im Gleichgewichtszustande auf der Kugel R zu erhalten, haben wir die der Kugel b mit $\left(\frac{b}{a}\right)^3$ zu multipliciren, wir erhalten

$$\frac{a\alpha}{4b^2\pi}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{\alpha}{\frac{4a^2\pi}{b}} = \frac{\alpha}{4R\pi}.$$

Ein Resultat, das mit den Ergebnissen in §. 3. Cap. I. übereinstimmt.

β) Die Aufgabe, die Vertheilung der Elektricität im Gleichgewichtszustande über irgend eine gegebene isolirte Leiteroberfläche zu bestimmen, kann demnach auch so umgeformt werden, dass man zu bestimmen habe, wie Elektricität über die geometrische Bildfläche der gegebenen Leiteroberfläche im Bezug auf eine im Innern des Leiters gelegene Kugel zu vertheilen sei, damit sie für alle Punkte der Kugel dieselbe constante Potentialfunction α aufweise. Da man nun nach dem vorhin unter α) besprochenen Falle immer eine solche elektrische Massenvertheilung innerhalb des geometrischen Bildes der gegebenen Leiteroberfläche angeben kann, dass ihre Potentialfunction auf alle Punkte der Kugel, im Bezug auf welche das geometrische Bild con-

struirt worden ist, denselben constanten Werth α aufweist, so kommt die eben genannte Aufgabe auch darauf zurück, diese angenommenen elektrischen Massen äquivalent für alle ausserhalb des geometrischen Bildes gelegene Punkte auf diese Bildfläche selbst zu transponiren. Hierzu sind in §. 11. Cap. I. die leitenden Grundgedanken angegeben worden, die man im vorliegenden Falle in folgender Weise verwerthen kann. Bezeichnet ϱ die gesuchte Dichtheit der Elektricität auf dem Bilde, V_a die Potentialfunction der Elektricität des Bildes für äussere Punkte, V_i solche für innere Punkte, so galt

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial V_a}{\partial n} + \frac{\partial V_i}{\partial n}\right],$$

wenn die Normalenelemente ∂n nach der Seite gerechnet wurden, auf welche sich V_a oder V_i bezieht. In unserem Falle ist nun V_a und $\frac{\partial V_a}{\partial n}$ bekannt, weil V_a übereinstimmt mit der Potentialfunction der im Innern der Bildfläche angenommenen elektrischen Masse. Die Aufgabe würde also sofort gelöst sein, wenn aus dem bekannten Werthe von V_a auch der von V_i gefolgert werden könnte, was aber in der Regel nicht der Fall ist. Man hat daher in folgender Weise zu rechnen: Man überdecke zuerst die Bildfläche mit Elektricität von der Dichtheit $\varrho_1 = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V_a}{\partial n}$ und bestimme deren Potentialfunction P_1 auf irgendeinen Punkt der Kugelfläche, im Bezug auf welche das geometrische Bild construirt wurde. Es ergiebt sich hierbei von selbst die Entwickelung von P_1 nach Kugelfunctionen. Das erste Glied dieser Entwickelung ist dabei gerade derjenige Werth, den die Potentialfunction der auf der Bildfläche anzubringenden elektrischen Ladung für alle Punkte der Kugel haben soll, es ist nämlich dieses erste Glied nichts anderes als

$$\frac{1}{a}\int\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V_a}{\partial n}\right)d\sigma,$$

wenn a den Radius der Kugel, und $d\sigma$ das Oberflächenelement der Bildfläche bezeichnet und die Integration über die ganze Bildfläche hin erstreckt wird. Nun ist nach dem Satze I., §. 3., Cap. I.

$$\int\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V_a}{\partial n}\right) d\sigma$$

nichts anderes als die gesammte zu transponirende Masse, die wir uns im Mittelpunkte der Kugel vom Radius a vereinigt denken können, so dass also in der That der vorige Ausdruck die behauptete Beschaffenheit hat und zugleich noch zeigt, dass die gesammte im Innern der Bildfläche anzunehmende Masse $a\alpha$ sein muss, wenn der constante Werth der Potentialfunction der auf der Bildfläche anzubringenden Elektricität für alle Punkte der Kugel mit dem Radius a, α betragen soll. Setzen wir nun

$$P_1 - \alpha = P_1',$$

so ist noch die Aufgabe zu lösen, dass wir über die Bildfläche eine elektrische Ladung verbreiten, deren Gesammtmenge Null beträgt, und die auf die Punkte der Kugel mit dem Radius a die Potentialfunction

$$-P_1'$$

besitzt. Um diese elektrische Ladung zu erhalten können wir folgendermassen verfahren. Wir nehmen eine Kugel b_1 mit dem Radius $b_1 < a$ an und überdecken diese Kugel so mit Elektricität, dass deren äussere Potentialfunction auf Punkte der Kugel mit dem Radius a gleich $-P_1'$ ist, was nach den in §. 5. Cap. III. entwickelten Lehrsätzen leicht geschehen kann. Den Radius b_1 nehmen wir möglichst klein an, indem die untere Grenze von b_1 nur davon abhängt, dass der Ausdruck, den wir für die Dichtheit der Elektricität auf der Kugel b_1 erhalten, convergire. Es kann unter allen Umständen b_1 so klein gemacht werden, dass ein Theil der mit Elektricität bedeckten Kugelfläche noch innerhalb der Bildfläche gelegen ist; wir bilden die äussere Potentialfunction dieser innerhalb der Bildfläche gelegenen elektrischen Theile, welche V_1 sei, und überdecken nun die Bildfläche selbst mit einer neuen Ladung von Elektricität, deren Dichtheit

$$\varrho_1 = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V_1}{\partial n}$$

sei und deren Potentialfunction auf Punkte der Kugel mit dem Radius a durch

$$-P_2'$$

dargestellt werden möge. Es besitzt dann die auf der Bildfläche angebrachte Elektricität auf Punkte der Kugel mit dem Radius a die Potentialfunction

$$\alpha + P_1' - P_2'.$$

Wir nehmen nun eine neue Kugelfläche b_2 mit dem Radius b_2 an und verfahren damit ganz wie im vorigen Falle, nur dass jetzt an Stelle der äussern Potentialfunction $-P_1'$ die Potentialfunction $-P_1' + P_2'$ tritt; es kann offenbar jetzt b_2 noch kleiner als b_1 gewählt werden. Wir fahren in der angegebenen Weise weiter fort, bis wir auf eine solche Hülfskugel b_n kommen, die ganz innerhalb der Bildfläche liegt und deren Radius b_n wir beliebig klein machen können. Da mindestens die zweite der ganz innerhalb der Bildfläche gelegenen Hülfskugeln b_m zur Gesammtsumme an elektrischer Ladung Null hat, dieser Werth Null dann aber auch aus demselben Grunde, aus welchem oben gefolgert wurde, dass bei der ersten Transposition der ursprünglich innerhalb der Bildfläche angenommenen elektrischen Massen, die Gesammtsumme wirklich auf die Bildfläche transponirt sei, für alle ferneren Hülfskugeln erhalten bleibt, so folgt, weil der Radius der letzten Hülfskugel b_n unendlich klein angenommen werden soll, dass sich auf dieser gar keine Elektricität mehr vorfinden kann, dass demnach durch den angegebenen Gang der Rechnung sämmtliche ursprünglich innerhalb der Bildfläche angenommenen elektrischen Massen äquivalent für alle äusseren Punkte auf die Bildfläche transponirt worden sind. Hiermit ist aber die anfänglich unter β) genannte Aufgabe gelöst.

γ) In ganz ähnlicher Weise, wie in dem eben unter β) besprochenen Falle kann man auch verfahren, um die zweite der am Schluss von §. 1. genannten Fundamentalaufgaben des ganzen vorliegenden Problemes zu lösen, nämlich die Influenzelektricität zu bestimmen, welche ein ausserhalb des Leiters gegebener Massenpunkt auf dem abgeleiteten Leiter erzeugt. Besitzt nämlich der influenzirende Massenpunkt die Masse μ, so bringe man im geometrischen Bilde dieses Massenpunktes, also innerhalb des geometrischen Bildes der

Leiteroberfläche die Masse $-\mu\frac{a}{c}$ an, wenn a den Radius der Kugel bezeichnet, im Bezug auf welche die geometrischen Bilder construirt werden und c die Entfernung des Massenpunktes μ vom Centrum dieser Kugel. Diese Masse $-\mu\frac{a}{c}$ hat man nun auf dem unter β) genannten Wege äquivalent auf die Bildfläche selbst zu transponiren.

Es ist ohne weiteres klar, dass man auch die jetzige Aufgabe zugleich mit der unter β) besprochenen lösen kann, oder dass man auch in ganz gleicher Weise die Aufgabe zu lösen im Stande ist, wenn nicht nur ein influenzirender Massenpunkt, sondern eine einen Raum oder eine Fläche anfüllende influenzirende Masse gegeben ist.

δ) Es versteht sich von selbst, dass man die unter β) und γ) besprochenen Aufgaben auch auf dem allgemeinen Wege lösen kann, der im Anfange dieses Paragraphen angegeben wurde, nämlich durch Auflösung eines Systemes unendlich vieler Gleichungen, indem man verlangt, dass die Bildfläche so mit Elektricität überdeckt werde, dass deren Potentialfunction auf alle Punkte der Kugel, im Bezug auf welche die Bildfläche construirt ist, einen constanten Werth aufweist. Das einzig abweichende der Behandlung ist, dass die reciproke Entfernung eines Punktes der Bildfläche und eines Punktes der eben genannten Kugel nicht mehr nach aufsteigenden, sondern nach absteigenden Potenzen des Radius jener Kugel vorgenommen werden muss und dass dieser Kugelradius erst dann wieder aus der Rechnung verschwindet, wenn man die gefundene elektrische Ladung der Bildfläche auf die ursprünglich gegebene Leiteroberfläche wieder überträgt.

Um die Resultate, welche entweder auf dem Wege, wie er am Anfange dieses Paragraphen auseinander gesetzt wurde, oder wie er unter β) γ) δ) beschrieben wurde, gefunden worden sind, auch der Form nach identisch zu machen, hat natürlich noch eine Entwickelung des unter β) γ) δ) gefundenen Resultates für die elektrische Vertheilung auf der gegebenen Leiteroberfläche nach Kugelfunctionen im Bezug auf dasselbe Polarcoordinatensystem, das auch bei Verfolgung des ersten Weges angewandt wurde, zu erfolgen.

Die Entwickelungscoëfficienten sind die Unbekannten x des früheren Systemes unendlich vieler Gleichungen VI, §. 1. Entwickelt man aus dem Resultat, wie es im vorher besprochenen Falle γ) erlangt worden ist, die Potentialfunction des in bekannter Weise mit Elektricität geladenen Leiters auf Punkte derselben Kugel mit dem Radius a, im Bezug auf welche auch die Gleichungen VI, §. 1. entstanden und in gleicher Weise die Potentialfunction des influenzirenden Massenpunktes, so erhält man durch Gleichsetzung der Coëfficienten gleicher Potenzen von a in beiden Entwickelungen das System VI, §. 1., in welchem aber die Werthe der in jenem System vorkommenden Unbekannten x bereits eingesetzt sind. —

Der unter β) und γ) besprochene Weg der Rechnung hat vor dem im Anfange dieses Paragraphen behandelten den Vorzug, dass er leichter den Genauigkeitsgrad der ganzen Rechnung erkennen lässt, was z. B. dann von grossem Vortheil ist, wenn die gegebene Leiteroberfläche scharfe Spitzen und Kanten enthält; dagegen hat er wiederum den Nachtheil, dass er nicht in gleicher Weise direct die Werthe der Unbekannten x ergiebt.

ε) Der unter β) und γ) erwähnte Weg der Rechnung lässt sich noch vereinfachen, wenn die Bildfläche aus Kugelflächentheilen zusammengesetzt ist, ein Fall, der dann eintritt, wenn die gegebene Leiteroberfläche ebenfalls von Kugelflächen oder von ebenen Flächen begrenzt ist. In diesem Falle kann man nämlich bei der äquivalenten Massentransposition bequem so verfahren, dass man zunächst die Kugelflächentheile der Bildfläche zu Vollkugeln ergänzt, die sich gegenseitig durchdringen. Man transponirt nun die in jeder einzelnen Vollkugel ursprünglich angenommenen zu transponirenden elektrischen Massen auf die sie umschliessenden Vollkugeln, was nach §. 5. Cap. III. sehr leicht geschehen kann. Bei dieser Transposition erhalten auch die Ergänzungsstücke der Bildfläche elektrische Ladungen; diese letzteren transponirt man wieder äquivalent für äussere Punkte auf sie umschliessende und ganz innerhalb der Bildfläche gelegene Kugeln und verfährt nun mit der auf diesen Hülfskugeln haftenden Elektricität gerade so wie mit

der ursprünglich angenommenen zu transponirenden Elektricität und fährt in dieser Weise mit wiederholter Transposition fort, bis die auf den Ergänzungsflächen des Bildes haftende elektrische Ladung verschwindet, was nothwendig eintreten muss, wenn die Transposition häufig genug wiederholt wird. —

Nachdem wir bis jetzt zwei Methoden zur Auflösung des allgemeinen Systemes unendlich vieler linearer Gleichungen VI, §. 1. kennen gelernt haben, erübrigt noch anzugeben, wie man sich die in jenem System mit $_v\psi_u$ bezeichneten rechten Seiten bequem verschaffen könne. Sind die zu betrachtenden Leiter und Nichtleiter in beliebiger Anordnung gegeben, so wird es in der Regel gestattet sein, die Leiter und Nichtleiter so mit Kugelflächen zu umgeben, dass die um irgend einen Leiter oder Nichtleiter gelegte Kugelfläche in allen ihren Punkten um ein endliches Stück von einem jeden der in den einzelnen Leitern angenommenen Coordinatenanfängen entfernt ist und zugleich nur denjenigen Coordinatenanfang umschliesst, der innerhalb der Leiterfläche liegt, um welche die Kugelfläche gelegt worden ist. Wir transponiren die auf den gegebenen Leitern und Nichtleitern haftenden elektrischen Massen äquivalent für alle ausserhalb einer jeden Kugel befindliche Punkte auf diese Kugel, so dass wir statt der äusseren Potentialfunction der gegebenen Leiter und Nichtleiter die der auf den Kugeln angebrachten Elektricität nehmen können. Die Radien, welche wir den einzelnen Kugeln zu geben haben, werden ihrer unteren Grenze nach bestimmt durch die Bedingung, dass die Ausdrücke, welche man für die Dichtheit der auf den Kugeln anzubringenden Elektricität erhält, convergiren müssen; die obere Grenze der Radien ist vorhin angegeben worden. Nach der angegebenen unteren Grenze für die Radien der Kugeln können dieselben zum Theil innerhalb, zum Theil ausserhalb der zugehörigen Leiter oder Nichtleiter liegen. Bei Ausführung der äquivalenten Massentransposition erscheint die auf den Kugelflächen anzubringende elektrische Ladung von selbst nach Kugelfunctionen entwickelt.

Die rechten Seiten des Systemes VI, §. 1. verlangen nun, dass man die äusseren Potentialfunctionen dieser Ku-

geln entwickelt nach Kugelfunctionen im Bezug auf ein Polarcoordinatensystem, dessen Anfang ausserhalb der Kugeln gelegen ist. Wir greifen einen speciellen Fall heraus, indem wir verlangen, es solle die Potentialfunction der elektrischen zum $s$ten Leiter (oder Nichtleiter) gehörigen Kugel auf einen beliebigen Punkt $a_p\ \vartheta_p\ \varphi_p$ der im $p$ten Leiter gelegenen Kugel mit dem Radius a_p entwickelt werden und zwar so, dass die Entwickelung bezogen ist auf das dem $p$ten Leiter angehörige Coordinatensystem. Wir nehmen an, dass, wenn irgend ein Punkt der zum $s$ten Leiter (oder Nichtleiter) gehörigen Kugel die Coordinaten $R_p\ {}_s\theta_s\ {}_s\varphi_s$ besitzt, diese Coordinaten so beschaffen seien, dass immer ${}_s\varphi_s = {}_p\varphi_p$, dass also die Polaraxe der beiden jetzt in Betracht kommenden Coordinatensysteme in dieselbe Gerade fallen und ferner, dass die ϑ_p und ${}_s\theta_s$ so gezählt werden, dass diese Coordinaten verschwinden für Punkte, welche auf den nach dem andern Coordinatenanfang hingerichteten Radienvectoren liegen, oder mit andern Worten, dass die Polaraxe des einen Coordinatensystemes nach dem Anfangspunkt des andern Coordinatensystemes hin gerichtet ist. Wir nehmen an, dass der eben genannte Zusammenhang zwischen den Coordinaten $\theta_p\ \varphi_p$ und ${}_s\theta_s\ {}_s\varphi_s$ zugleich mit bei der äquivalenten Massentransposition erreicht worden sei.

Ist nun die Dichtheit der Elektricität auf der Kugel des $s$ten Leiters (oder Nichtleiters) dargestellt durch

$$\varrho_s' = \sum_0^{\infty}{}_n \sum_{-n}^{+n}{}_\lambda\ {}^n g_s{}^\lambda\ P_\lambda{}^n\,(\cos {}_s\theta_s)\, e^{i\lambda\, {}_s\varphi_s},$$

so ist die gesuchte Potentialfunction

$$\int_0^{{}_p\theta_s'} \int_0^{2\pi} \frac{\sum_0^{\infty}{}_n \sum_{-n}^{+n}{}_\lambda\ {}^n g_s{}^\lambda\ P_\lambda{}^n\,(\cos {}_s\theta_s)\, e^{i\lambda\, {}_s\varphi_s}\ {}_p r_s{}^2\ \sin {}_p\theta_s\, d_p\theta_s\, d_p\varphi_s}{\frac{\partial\, {}_p r_s}{\partial w}\sqrt{a_p{}^2 + {}_p r_s{}^2 - 2 a_p\, {}_p r_s \cos {}_p\gamma_s}},$$

wenn die Integrationsgrenze ${}_p\theta_s'$ so gewählt wird, dass sich die Integration erstreckt über die ganze mit Elektricität überdeckte Kugel. Führen wir nun unter den Integralzeichen die Entwickelung

$$\frac{1}{\sqrt{a_p^2 + {}_pr_s^2 - 2\,{}_pr_s \cos {}_p\gamma_s}} = \sum_0^\infty{}_m \frac{a_p^m}{{}_pr_s^{m+1}} P^m (\cos {}_p\gamma_s)$$

$$P^m (\cos {}_p\gamma_s) = \sum_{-m}^{+m}{}_\mu (-1)^\mu \frac{(1.3\ldots\overline{2m-1})^2}{\Pi(m+\mu)\,\Pi(m-\mu)}$$

$$P_\mu^m (\cos\vartheta_p)\, P_\mu^m (\cos{}_p\theta_s)\, e^{i\mu({}_p\varphi_p - {}_p\varphi_s)}$$

ein, so erstreckt sich die Integration nach ${}_p\varphi_s$ nur über Ausdrücke von der Form

$$\int_0^{2\pi} e^{i(\lambda-\mu)\,{}_p\varphi_s}\, d_p\varphi_s = \begin{cases} 2\pi & \text{wenn } \lambda = \mu \\ 0 & \;\;\text{„}\;\; \lambda \gtrless \mu \end{cases}.$$

Der vorige Ausdruck für die Potentialfunction geht also über in

$$2\pi.\sum_0^\infty{}_m\, a_p^m \sum_{-m}^{+m}{}_\mu (-1)^\mu \frac{(1.3\ldots\overline{2m-1})^2}{\Pi(m+\mu)\Pi(m-\mu)} P_\mu^m (\cos\vartheta_p)\, e^{i\mu\varphi_p}$$

$$\int_0^{{}_p\theta_s'} \frac{\sum_0^\infty{}_n\, {}^ng_{s\mu}\, P_\mu^n (\cos{}_s\theta_s)\, P_\mu^m (\cos{}_p\theta_s) \sin{}_p\theta_s\, d_p\theta_s}{\frac{\partial\,{}_pr_s}{\partial w}\, {}_pr_s^{m-1}}.$$

Der Werth des Integrales selbst ist unabhängig von ϑ_p und φ_p, wir bezeichnen ihn desswegen kurz mit J_μ^m, indem wir wissen, dass dem absoluten Werthe nach immer $\mu \leqq m$ sein muss. Der vorstehende Ausdruck stellt zugleich eine Entwickelung der gesuchten Potentialfunction nach Kugelfunctionen dar und wir erhalten als Coëfficienten von $P_v^u (\cos\vartheta_p)\, e^{iv\varphi_p}$ den Werth

$$2\pi.\, a_p^u (-1)^v \frac{(1.3\ldots\overline{2u-1})^2}{\Pi(u+v)\,\Pi(u-v)} \cdot J_v^u.$$

Oben in §. 1. wurde dieser Coëfficient noch dadurch vereinfacht, dass man ihn durch den Factor

$$a_p^u (-1)^v \cdot \frac{(1.3\ldots\overline{2u-1})^2}{\Pi(u+v)\,\Pi(u-v)}$$

dividirte; thuen wir dasselbe auch jetzt, da ja der Coëfficient von $P_v^u (\cos\vartheta_p)\, e^{iv\varphi_p}$ nur in dieser vereinfachten Form in das obige Gleichungensystem VI, §. 1. einzuführen ist, so erhalten wir für unsern Coëfficienten einfach

$$2\pi . J_v^\kappa$$

und es kommt nun nur noch darauf an, den Werth

$$12, \quad J_v^\kappa = \int_0^{{}_p\theta_s'} \frac{\sum_0^\infty {}_n {}^n g_s^v \, P_v^n (\cos {}_s\theta_s) \, P_v^\kappa (\cos {}_p\theta_s) \sin {}_p\theta_s \, d {}_p\theta_s}{\frac{\partial {}_p r_s}{\partial w} \cdot {}_p r_s^{\kappa - 1}}$$

für die Ausrechnung bequemer umzugestalten.

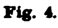
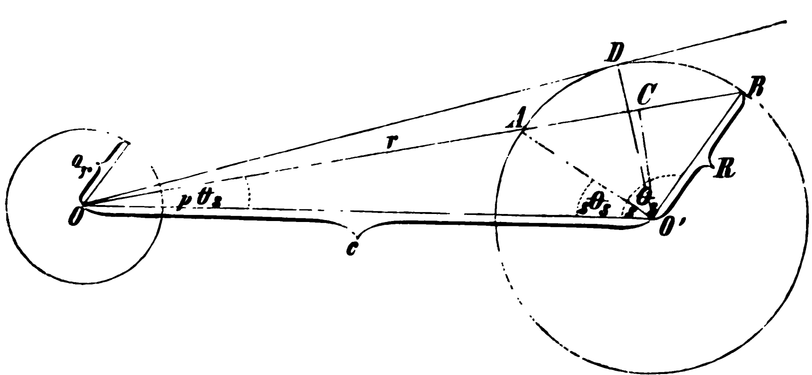


Fig. 4.



Stellt vorstehende Zeichnung die Linien dar, wie sie in irgend einer Meridianebene auftreten, und bezeichnen wir den Abstand der Anfangspunkte beider in Betracht kommender Coordinatensysteme mit c, den Radius der zum s^{ten} Leiter (oder Nichtleiter) gehörigen Kugel mit R, während der Radiusvector des anzuwendenden Coordinatensystemes immer r ist, so ist ersichtlich, dass die beiden Coordinaten ${}_p\vartheta_s$ und ${}_s\vartheta_s$ immer aneinander geknüpft sind durch die Relationen

$$13, \quad r \cos {}_p\vartheta_s + R \cos {}_s\vartheta_s = c; \; r \sin {}_p\vartheta_s = R \sin {}_s\vartheta_s$$

und die Integration ist so auszuführen, dass zuerst der Winkel ${}_p\vartheta_s$ wächst, bis er die Grösse des Winkels DOO' erreicht hat und dann wieder bis zu Null abnimmt, im erstern Intervalle gehört zur Breite ${}_p\vartheta_s$ der Radiusvector OA, im letztern Intervalle der Radiusvector OB. Im ersteren Falle ist also

$$r = \overline{OA} = \overline{OC} - \overline{AC} = c\cos_p\theta_s - \sqrt{\overline{AO'}^2 - \overline{CO'}^2}$$

$$14,\quad r = c\cos_p\theta_s - \sqrt{R^2 - c^2\sin^2{}_p\theta_s},$$

im letzteren Intervalle ist

$$r = \overline{OB} = \overline{OC} + \overline{CB} = c\cos_p\theta_s + \sqrt{\overline{BO'}^2 - \overline{CO'}^2}$$

$$15,\quad r = c\cos_p\theta_s + \sqrt{R^2 - c^2\sin^2{}_p\theta_s}.$$

Ferner ist $\frac{\partial_p r_s}{\partial w}$ der Cosinus des spitzen Winkels zwischen dem Radiusvector und der Flächennormale, also sowohl für das erste als auch für das zweite Integrationsintervall

$$16,\quad \frac{\partial_p r_s}{\partial w} = \frac{AC}{AO'} = \frac{BC}{BO'} = \frac{\sqrt{R^2 - c^2\sin^2{}_p\theta_s}}{R}.$$

Vermittels der Gleichungen 13, 14, 15, 16, geht nun die Gleichung 12, über in $J_v{}^u =$

$$17,\quad \int_0^{\arcsin\frac{R}{c}} \frac{\sum_0^\infty {}_n{}_n g_s{}^v\, P_v{}^n\left(\frac{c - \cos_p\theta_s[c\cos_p\theta_s - \sqrt{R^2 - c^2\sin^2{}_p\theta_s}]}{R}\right) P_v{}^u(\cos_p\theta_s)\sin_p\theta_s\, d_p\theta_s}{(c\cos_p\theta_s - \sqrt{R^2 - c^2\sin^2{}_p\theta_s})^{u-1}\frac{\sqrt{R^2 - c^2\sin^2{}_p\theta_s}}{R}}$$
$$+\int_{\arcsin\frac{R}{c}}^0 \frac{\sum_0^\infty {}_n{}_n g_s{}^v\, P_v{}^n\left(\frac{c - \cos_p\theta_s[c\cos_p\theta_s + \sqrt{R^2 - c^2\sin^2{}_p\theta_s}]}{R}\right) P_v{}^u(\cos_p\theta_s)\sin_p\theta_s\, d_p\theta_s}{(c\cos_p\theta_s + \sqrt{R^2 - c^2\sin^2{}_p\theta_s})^{u-1}\frac{\sqrt{R^2 - c^2\sin^2{}_p\theta_s}}{R}}.$$

Setzen wir in diesen beiden Integralen

$$\cos_p\theta_s = x, \text{ also } \sin_p\theta_s\, d_p\theta_s = -dx$$

und substituiren dann für x die neue Variable y, indem wir für das erste Integral setzen

$$cx - \sqrt{c^2x^2 - (c^2 - R^2)} = y\sqrt{c^2 - R^2},$$

für das zweite dagegen

$$cx + \sqrt{c^2x^2 - (c^2 - R^2)} = y\sqrt{c^2 - R^2},$$

so ergiebt sich für beide Integrale

$$x = \frac{\sqrt{c^2 - R^2}}{2c} \cdot \frac{1 + y^2}{y}$$

$$dx = \frac{\sqrt{c^2 - R^2}}{2c} \cdot \frac{y^2 - 1}{y^2} \, dy$$

dagegen nach der ersten oder nach der zweiten Substitution verschieden

$$\mp \sqrt{c^2 x^2 - (c^2 - R^2)} = \frac{\sqrt{c^2 - R^2}}{2} \, \frac{y^2 - 1}{y} .$$

Für das erste Integrationsintervall treten aber für y als Integrationsgrenzen auf die Werthe:

$$\sqrt{\frac{c - R}{c + R}} \text{ und } 1$$

und für das zweite Integrationsintervall

$$1 \text{ und } \sqrt{\frac{c + R}{c - R}} .$$

Während also im ersten Integrationsintervall y immer kleiner als 1 und positiv ist, ist es im zweiten Intervall immer grösser als 1. Es ist daher auch richtig, wenn wir für beide Integrationsintervalle die vorige Gleichung vereinfachen zu

$$- \sqrt{c^2 x^2 - (c^2 - R^2)} = \frac{\sqrt{c^2 - R^2}}{2} \, \frac{y^2 - 1}{y} ,$$

indem sich alsdann das richtige Vorzeichen auf der linken Seite dieser Gleichung für das zweite Integrationsintervall von selbst herausstellt.

Führen wir nun die Variable y in die Gleichung 17, ein, so entsteht

$$18, \qquad J_v^u = \sum_0^\infty {}_n \, {}^n g_s^v \, \frac{R}{c \sqrt{c^2 - R^2}^{\,u-1}}$$

$$\int_{\sqrt{\frac{c-R}{c+R}}}^{\sqrt{\frac{c+R}{c-R}}} P_v^n \left(\frac{1}{2cR} \left[c^2 + R^2 - y^2 (c^2 - R^2) \right] \right) P_v^u \left(\frac{\sqrt{c^2 - R^2}}{2c} \cdot \frac{1 + y^2}{y} \right) \frac{dy}{y^u} .$$

Nun ist allgemein

$$P_m^n (\cos \theta) = i^m \sin^m \theta \, \mathfrak{P}_m^n (\cos \theta)$$

$$\mathfrak{P}_m^n (\cos \theta) = \cos^{n-m} \theta - \frac{n-m. \; n-m-1}{2. \; 2n-1} \cos^{n-m-2} \theta$$

$$+\frac{n-m.\,n-m-1.\,n-m-2.\,n-m-3}{2.\,4.\,2n-1.\,2n-3}\cos^{n-m-4}\theta \mp \ldots.$$

In unserem Falle ist daher

$$P_v^n(\cos{}_s\theta_s) = i^v \sin^v{}_s\theta_s\, \mathfrak{P}_v^n(\cos{}_s\theta_s)$$

$$P_v^u(\cos{}_p\theta_s) = i^v \sin^v{}_p\theta_s\, \mathfrak{P}_v^u(\cos{}_p\theta_s) = i^v \sqrt{1-x^2}^{\,v}\, \mathfrak{P}_v^u(x).$$

Da ferner nach 13,

$$\sin{}_s\theta_s = \frac{r}{R}\sin{}_p\theta_s,$$

so entsteht

$$P_v^n(\cos{}_s\theta_s)P_v^u(\cos{}_p\theta_s) = (-1)^v\left(\frac{r}{R}\right)^v(1-x^2)^v\,\mathfrak{P}_v^n(\cos{}_s\theta_s)\,\mathfrak{P}_v^u(x).$$

Hiermit geht aber die Gleichung 18, über in

$$J_v^u = \sum_0^\infty{}_n\, {}^n g_s^v \frac{(-1)^v}{cR^{v-1}\sqrt{c^2-R^2}^{\,u-v-1}}$$

$$19, \qquad \times\int_{\sqrt{\frac{c-R}{c+R}}}^{\sqrt{\frac{c+R}{c-R}}} \mathfrak{P}_v^n\left(\frac{1}{2cR}[c^2+R^2-y^2(c^2-R^2)]\right)$$

$$\mathfrak{P}_v^u\left(\frac{\sqrt{c^2-R^2}}{2c}\cdot\frac{1+y^2}{y}\right)\left(\frac{4c^2y^2-(c^2-R^2)(1+y^2)^2}{4c^2}\right)^v\frac{dy}{y^{u+v}}.$$

Da nun die mit $\mathfrak{P}$ bezeichneten Functionen nur ganze Potenzen der beigesetzten Argumente enthalten, so ist durch die gebrauchte Substitution der Integrand rational gemacht und die Integration selbst kann ohne Schwierigkeit ausgeführt werden. Führen wir noch

$$\frac{R}{c} = \cos\varepsilon$$

in das obige Integral ein, so geht es über in

$$20, \quad L_v^u = \int_{\operatorname{tng}\frac{\varepsilon}{2}}^{\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2}} \mathfrak{P}_v^n\left(\tfrac{1}{2}[(1+y^2)\cos\varepsilon+(1-y^2)\sec\varepsilon]\right)$$

$$\mathfrak{P}_v^u\left(\tfrac{1}{2}\sin\varepsilon\,\frac{1+y^2}{y}\right)\left(y^2-\tfrac{1}{4}\sin^2\varepsilon\,(1+y^2)^2\right)^v\frac{dy}{y^{u+v}}$$

und zeigt somit, dass sein Werth nur abhängig ist von dem

Oeffnungswinkel $2\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$ des geraden Kreiskegels, der die Kugel des s^{ten} Leiters (oder Nichtleiters) berührt und seine Spitze im Centrum der Kugel mit dem Radius a_p gelegen hat. Durch Anlegung einer Tabelle für die verschiedenen Werthe dieses Integrales, welche entstehen, wenn man dem ε eine immer andere und andere Grösse beilegt, kann man sich daher die Arbeit der Rechnung in der überwiegenden Zahl der Fälle wesentlich abkürzen.

Fassen wir die zuletzt erhaltenen Resultate noch einmal übersichtlich zusammen, indem wir berücksichtigen, dass es wesentlich auf die Beschaffung der Coëfficienten ${}_v\psi_u$ des Systemes unendlich vieler linearer Gleichungen VI, §. 1. ankommt, der eben berechnete Coëfficient also, wenn er mit ${}_v\psi_u$ verglichen werden soll, mit negativem Vorzeichen zu versehen ist, so können wir sagen:

I n allen den Fällen, in welchen man die gegebenen Leiter (und Nichtleiter) so durch elektrische Kugelflächen ersetzen kann, dass diese Kugelflächen in allen ihren Punkten um endlich grosse Stücke von den in den einzelnen Leitern liegenden Coordinatenanfängen entfernt bleiben, und für alle ausserhalb ihrer selbst gelegene Punkte dieselbe Potentialfunction besitzen wie die Leiter (oder Nichtleiter), zu denen sie gehören, nehmen die rechten Seiten des Systemes VI, §. 1. die Form an:

$$ {}_v\psi_u = -2\pi . \sum_{1}^{p-1}\sum_{p+1}^{q}{}_s \sum_{0}^{\infty}{}_n \; {}^n g_s^v \frac{(-1)^v}{c_s R_s^{v-1} \sqrt{c_s^2 - R_s^2}^{\,u-v-1}} \cdot L_v^u, $$

wobei L_v^u das im Voraus für alle Fälle in einer Tabelle berechnenbare Integral

$$ L_v^u = \int_{\operatorname{tng}\frac{\varepsilon}{2}}^{\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2}} \mathfrak{P}_v^n\left(\frac{1+y^2}{2}\cos\varepsilon + \frac{1+y^2}{2}\sec\varepsilon\right) $$

$$ \mathfrak{P}_v^u\left(\frac{1+y^2}{2y}\sin\varepsilon\right)\left(y^2 - \left(\frac{1+y^2}{2}\right)^2\sin^2\varepsilon\right)^v \frac{dy}{y^{u+v}} $$

bedeutet und $\cos\varepsilon = \frac{R_s}{c_s}$, wenn R_s der Radius der zum s^{ten} Leiter (oder Nichtleiter) gehörigen Kugel und c_s die Entfernung des Mittelpunktes dieser Kugel von dem im p^{ten} Leiter gelegenen Coordinatenanfang bedeutet. Die Coëfficienten ${}^n g_s{}^v$ bedeuten die (convergenten) Coëfficienten der nach Kugelfunctionen entwickelten elektrischen Ladung der zum s^{ten} Leiter oder Nichtleiter gehörigen Kugel, wenn die dieser Kugel angehörige Polaraxe eine solche Lage hat, dass sie mit der zum p^{ten} Leiter gehörigen in dieselbe Gerade fällt und entgegengesetzte Richtung besitzt.

Endlich möge hier nur noch kurz angedeutet werden, dass die oben mit ${}^n{}_r\varkappa_p{}^\lambda$ bezeichneten Unbekannten mit verschiedenem linken unteren Index, aber demselben p, λ, und n nahezu eine geometrische Reihe bilden, wie schon früher in §. 1. erwähnt wurde, dass man daher auch den Werth der Summe der Reihe dieser ${}^n{}_r\varkappa_p{}^\lambda$ ohne grossen Fehler als Summe einer geometrischen Reihe berechnen kann, wenn man die Reihe beginnen lässt mit einem grösseren Werthe von r.

Im Bezug auf die als bekannt angenommenen Constanten α brauchen wir hier nur auf §. 7. Cap. II. zu verweisen.

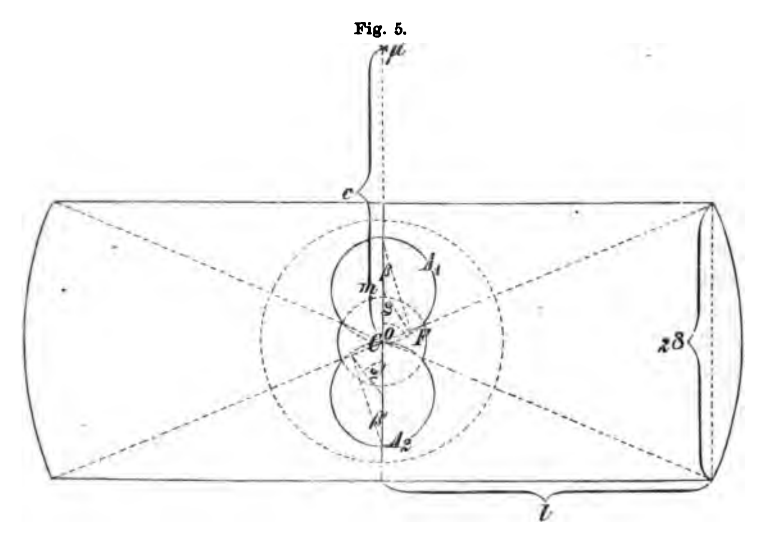
§. 4.
Anwendung der Methoden des vorigen Paragraphen auf ein Beispiel.

Die Anwendungen der im vorigen Paragraphen beschriebenen Methoden zur Lösung der elektrostatischen Fundamentalprobleme auf bestimmte Beispiele haben keine weitere analytische Schwierigkeit, namentlich gilt diess von der im Anfange (und Ende) von §. 3. genauer besprochenen Methode. In der That handelt es sich dabei nur um das Einsetzen der durch jedes concrete Beispiel gegebenen Werthe von $f_0(m, n)$ in die früheren Formeln. Allerdings erfordert aber dieser Weg eine höchst umständliche und Zeit raubende Rechnung, wenn der Genauigkeitsgrad der Rechnung ein

grösserer sein soll. Es wird für den Zweck dieses Lehrbuches hinreichend sein, wenn wir die Lösung der elektrostatischen Fundamentalaufgabe für einen Fall geben, der sich bequem nach ε) §. 3. behandeln lässt.

Das Beispiel, welches wir behandeln wollen, sei eine horizontal liegend gedachte Kreisscheibe, deren begrenzende obere und untere Fläche Kreisflächen mit dem Radius l sind; die Dicke der Scheibe sei 2δ und der Rand der Scheibe sei das Stück einer Kugelfläche, das von der oberen und unteren Begrenzungsfläche der Scheibe abgeschnitten wird, einer Kugelfläche, deren Centrum der Scheibenmittelpunkt ist. Vergl. nebenstehende Figur 5. und ε) im vorhergehenden Paragraph.

Fig. 5.



In der verlängert gedachten Axe der Scheibe liege ein influenzirender Massenpunkt mit der Masse μ und dem Abstand $c > \delta$ vom Centrum der Scheibe. Es sei der Scheibe ein solches Quantum von Elektricität mitgetheilt worden, dass nach Eintritt des elektrischen Gleichgewichtes der Werth der constanten Potentialfunction auf alle Punkte auf und innerhalb der Scheibe α betrage.

Zum Anfang unseres räumlichen Polarcoordinatensystemes nehmen wir den Mittelpunkt der Scheibe und zählen

die Breiten θ von der nach dem Massenpunkt μ gerichteten Seite der Scheibenaxe an, so dass dieser Punkt selbst die Breite Null besitzt. Der Radius der innerhalb der Scheibe gelegenen und um den Scheibenmittelpunkt beschriebenen Kugelfläche, im Bezug auf welche wir das geometrische und physikalische Bild der Scheibenbegrenzung construiren, sei $a < \delta$.

Dann ist das geometrische Bild der oberen Scheibenfläche eine Kugel mit dem Radius $\frac{a^2}{2\delta}$, deren Mittelpunkt um die Länge des Radius $\frac{a^2}{2\delta}$ vom Scheibenmittelpunkte entfernt auf der Scheibenaxe liegt. Symmetrisch dazu liegt das geometrische Bild der unteren Scheibenfläche, ebenfalls eine Kugel mit dem Radius $\frac{a^2}{2\delta}$. Endlich ist auch noch das geometrische Bild des Scheibenrandes eine Kugel, die aber mit dem Radius $\frac{a^2}{\sqrt{l^2+\delta^2}}$ um den Scheibenmittelpunkt beschrieben ist. Wir bezeichnen diese drei Kugeln der Reihe nach kurz mit ${}_1A$, ${}_2A$ und B, und es ist offenbar, dass von ihnen nur diejenigen Stücke das geometrische Bild der Scheibenbegrenzung zusammensetzen, welche das geometrische Bild nach aussen hin begrenzen. Die Potentialfunction des Massenpunktes μ auf Punkte der Kugel mit dem Radius a ist nun eben so gross wie die Potentialfunction eines Massenpunktes mit der Masse $\mu\frac{a}{c}$ gelegen auf der Scheibenaxe in der Entfernung $\frac{a^2}{c}$ vom Scheibenmittelpunkte nach der Seite des Massenpunktes μ hin. Soll daher für alle Punkte der Kugel mit dem Radius a die Potentialfunction von elektrischen Massen, die sich äquivalent auf das geometrische Bild der Scheibe transponiren lassen und des Massenpunktes μ, α betragen, so können wir diese Potentialfunction entstehen lassen durch die punktförmige elektrische Masse $a\alpha$ im Scheibenmittelpunkte und die ebenfalls punktförmige elektrische Masse $-\mu\frac{a}{c}$ gelegen im geometrischen Bilde des gegebenen Massenpunktes μ.

Die Aufgabe, welche jetzt noch vorliegt, ist nun der

Hauptsache nach nur die, die beiden punktförmigen elektrischen Massen $a\alpha$ und $-\mu\frac{a}{c}$, welche innerhalb des geometrischen Bildes der Scheibe liegen, äquivalent für alle ausserhalb des Bildes gelegene Punkte zu transponiren.

Zu diesem Zweck transponiren wir zunächst die Masse $a\alpha$ auf die Vollkugel B und erhalten auf dieser die gleichförmige elektrische Dichtheit D'

$$1, \quad D' = \frac{a\alpha}{4\frac{a^4}{l^2+\delta^2}\pi} = \frac{\alpha(l^2+\delta^2)}{4a^3\pi}.$$

Wir transponiren ferner die punktförmige elektrische Masse $-\mu\frac{a}{c}$ auf die Vollkugel ${}_1A$ und nehmen hierzu ein neues Polarcoordinatensystem der ϑ_1 und r an, dessen Anfang im Mittelpunkte der Kugel ${}_1A$ liegt und dessen Breiten ϑ_1 von derjenigen Seite der Scheibenaxe an gezählt werden, die nach dem Scheibenmittelpunkte gerichtet ist. Da der Radius der Kugel ${}_1A$ $\frac{a^2}{2\delta}$ ist, so ist der Massenpunkt $-\mu\frac{a}{c}$ von dem Anfang unseres neuen Polarcoordinatensystemes entfernt um die Strecke $\frac{a^2}{2\delta}-\frac{a^2}{c}=a^2\left(\frac{c-2\delta}{2\delta c}\right)$, welche positiv oder negativ in Rechnung zu ziehen ist, wie es dieser Ausdruck selbst besagt oder je nachdem $c \gtrless 2\delta$. Die Potentialfunction des Massenpunktes $-\mu\frac{a}{c}$ auf Punkte, welche ausserhalb der Kugel ${}_1A$ liegen, ist nun:

$$\frac{-\mu\frac{a}{c}}{\sqrt{\left(a^2\frac{c-2\delta}{2\delta c}\right)^2-2a^2\frac{c-2\delta}{2\delta c}r\cos\vartheta_1+r^2}}$$

$$=-\mu\frac{a}{c}\sum_0^\infty{}^n\left(\frac{\frac{a^2}{2\delta}}{r}\right)^{n+1}\left(\frac{\frac{a^2(c-2\delta)}{2c\delta}}{\frac{a^2}{2\delta}}\right)^n\frac{1}{\frac{a^2}{2\delta}}P^n(\cos\vartheta_1)$$

$$=\sum_0^\infty{}^n\left(\frac{\frac{a^2}{2\delta}}{r}\right)^{n+1}A'_n;$$

nach §. 5. Cap. III. können wir nun die Masse $-\mu\frac{a}{c}$

äquivalent für alle ausserhalb der Kugel ${}_1A$ gelegenen Punkte ersetzen durch eine Massenvertheilung auf dieser Kugel, welche die elektrische Dichtheit besitzt

$$\frac{1}{4\frac{a^2}{2\delta}\pi}\sum_0^\infty{}_m (2m+1) A_m'.$$

Oder auf der Vollkugel ${}_1A$ ist anzubringen eine elektrische Ladung mit der Dichtheit ${}_1D^1$

$$2,\qquad {}_1D^1 = -\mu\frac{\delta^2}{a^3 c\pi}\cdot\sum_0^\infty{}_m (2m+1) A_m$$
$$A_m = \left(\frac{c-2\delta}{c}\right)^m P^m(\cos\vartheta_1).$$

Ein Theil der hiernach mit Elektricität überdeckten Kugel ${}_1A$ liegt aber innerhalb des geometrischen Bildes der Scheibenbegrenzung, nämlich gerade derjenige Theil, der auch innerhalb der Kugel B liegt. Wir transponiren diesen Theil äquivalent für äussere Punkte auf die Kugel B. Wir bilden zu diesem Zweck die Potentialfunction dieses mit elektrischer Masse belegten Theiles der Kugelfläche ${}_1A$ im Bezug auf das Coordinatensystem, dessen Anfang im Scheibenmittelpunkte liegt. Trifft nun die Scheibenaxe die Kugel ${}_1A$ ausser im Scheibenmittelpunkte noch im Punkte A_1 und ist F irgend ein Punkt des Theiles der Kugel ${}_1A$, der innerhalb der Kugel B liegt, so ist, wenn die Gerade $A_1 F$ mit der Scheibenaxe den Winkel β bildet,

$$\theta + \beta = \frac{\pi}{2};\ \vartheta_1 = 2\beta$$

folglich $\qquad \vartheta_1 = \pi - 2\theta;\ \cos\vartheta_1 = -\cos 2\theta.$

$$\varrho = \overline{CF} = \overline{A_1 C}\sin\beta = \frac{a^2}{\delta}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{a^2}{\delta}\cos\theta.$$

und in leicht verständlichen Zeichen ist nun die Potentialfunction des fraglichen Theiles der Kugel ${}_1A$

$$-\mu\frac{\delta^2}{a^3 c\pi}\int_{\operatorname{arctng}\frac{l}{\delta}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\frac{\sum_0^\infty{}^m (2m+1) A_m\, \varrho^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\frac{\partial\varrho}{\partial w}\sqrt{\varrho^2 + r^2 - 2r\varrho\cos\gamma}}.$$

Der Ausdruck unter dem Integralzeichen ist vollständig unabhängig von der Länge φ, entwickelt man gleichzeitig

$$\frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + r^2 - 2r\varrho\cos\gamma}}, \ \varrho < r$$

nach Kugelfunctionen und integrirt im Bezug auf φ, so geht der vorige Ausdruck über in:

$$-2\mu\frac{\delta^2}{a^3c}\sum_0^\infty{}_n \frac{P^n(\cos\theta)}{r^{n+1}}$$

$$\int\limits_{\operatorname{arctng}\frac{l}{\delta}}^{\frac{\pi}{2}} P^n(\cos\theta)\sum_0^\infty{}_m(2m+1)A_m.\frac{\varrho^{n+2}}{\frac{\partial\varrho}{\partial w}}\sin\theta d\theta$$

$$= -2\mu\frac{\delta^2}{a^3c}\sum_0^\infty{}_n\left(\frac{\frac{a^2}{\sqrt{l^2+\delta^2}}}{r}\right)^{n+1} P^n(\cos\theta)$$

$$\int\limits_{\operatorname{arctng}\frac{l}{\delta}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\frac{\varrho}{a^2}}{\sqrt{l^2+\delta^2}}\right)^n\frac{\frac{\varrho^2}{a^2}}{\sqrt{l^2+\delta^2}\frac{\partial\varrho}{\partial w}}.P^n(\cos\theta)\sum_0^\infty{}_m(2m+1)A_m\sin\theta d\theta.$$

Es ist aber, wenn wir den für ϱ gefundenen Werth einsetzen und beachten, dass $\frac{\partial\varrho}{\partial w} = \cos\theta$

$$\left(\frac{\frac{\varrho}{a^2}}{\sqrt{l^2+\delta^2}}\right)^n\frac{\frac{\varrho^2}{a^2}}{\sqrt{l^2+\delta^2}\frac{\partial\varrho}{\partial w}} = \frac{a^2}{\delta^2}\sqrt{l^2+\delta^2}\left(\frac{\sqrt{l^2+\delta^2}}{\delta}\right)^n\cos^{n+1}\theta.$$

Der vorige Ausdruck für die Potentialfunction nimmt daher die Form an:

$$-2\mu\frac{\sqrt{l^2+\delta^2}}{ac}\sum_0^\infty{}_n\left(\frac{\frac{a^2}{\sqrt{l^2+\delta^2}}}{r}\right)^{n+1}\left(\frac{\sqrt{l^2+\delta^2}}{\delta}\right)^n P^n(\cos\theta)$$

$$\int\limits_{\operatorname{arctng}\frac{l}{\delta}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+1}\theta\, P^n(\cos\theta)\sum_0^\infty{}_m(2m+1)A_m\sin\theta d\theta.$$

$$= -2\mu \frac{\sqrt{l^2+\delta^2}}{ac} \sum_0^\infty{}_n \left(\frac{a^2}{\frac{\sqrt{l^2+\delta^2}}{r}}\right)^{n+1} B_n{}^1$$

und jetzt ergiebt die äquivalente Transposition der zu transponirenden elektrischen Masse auf der Kugel B die elektrische Dichtheit

$$\frac{-2\mu \frac{\sqrt{l^2+\delta^2}}{ac}}{4 \frac{a^2}{\sqrt{l^2+\delta^2}} \pi} \sum_0^\infty{}_m (2m+1) B_m{}^1 = -\frac{2\mu (l^2+\delta^2)}{4a^3 c\pi} \sum_0^\infty{}_m (2m+1) B_m{}^1.$$

Auf derselben Kugel befand sich aber bereits eine elektrische Ladung mit der unter 1, genannten Dichtheit. Nennen wir daher die gesammte auf der Kugel B jetzt befindliche elektrische Dichtheit D_1, so ist

$$D_1 = \frac{l^2+\delta^2}{4a^3\pi}\left(\alpha - \frac{2\mu}{c} \sum_0^\infty{}_m (2m+1) B_m{}^1\right.$$

3, $$B_m{}^1 = P^m(\cos\theta)\left(\frac{\sqrt{l^2+\delta^2}}{\delta}\right)^m$$

$$\int_{\operatorname{arctg}\frac{l}{\delta}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+1}\theta\, P^m(\cos\theta) \sum_0^\infty{}_n (2n+1) A_n \sin\theta\, d\theta$$

$$A_n = \left(\frac{c-2\delta}{c}\right)^n P^n(-\cos 2\theta).$$

Von dieser elektrischen Ladung der Kugel B liegt aber nur ein Theil auf dem geometrischen Bilde der Scheibe, ein anderer Theil liegt innerhalb der Kugel ${}_1A$, der dritte Theil innerhalb der Kugel ${}_2A$. Diese letzteren beiden Theile sind nun äquivalent auf die sie umschliessenden Kugeln ${}_1A$ und ${}_2A$ zu transponiren.

Zu diesem Zwecke bestimmen wir zunächst die Potentialfunction des innerhalb der Kugel ${}_1A$ gelegenen Theiles im Bezug auf das bereits früher für diese Kugel angenommene Coordinatensystem.

Bezeichnen wir die im Bezug auf ϑ_1 gültigen Integrationsgrenzen kurz mit $\vartheta_1{}^0$ und $\vartheta_1{}'$, so ist die gesuchte Po-

tentialfunction im Bezug auf Punkte, die ausserhalb der Kugel ${}_1A$ liegen, in leicht verständlichen Zeichen:

$$\int_{\vartheta_1^0}^{\vartheta_1'}\int_0^{2\pi}\frac{D_1\varrho^2\sin\vartheta_1 d\vartheta_1 d\varphi}{\frac{\partial\varrho}{\partial w}\sqrt{\varrho^2+r^2-2r\varrho\cos\gamma}}=\varrho<r.$$

Auch hier kann, wie früher, die Integration im Bezug auf φ sofort ausgeführt werden, so dass entsteht

$$2\pi\sum_0^\infty{}_n\frac{P^n(\cos\vartheta_1)}{r^{n+1}}\int_{\vartheta_1^0}^{\vartheta_1'}\frac{\varrho^n D_1 P^n(\cos\vartheta_1)\varrho^2\sin\vartheta_1 d\vartheta_1}{\frac{\partial\varrho}{\partial w}}.$$

Im Bezug auf die Feststellung der Integrationsgrenzen ϑ_1^0 und ϑ_1' müssen wir die Fälle unterscheiden, ob die Kugel B den Mittelpunkt der Kugel ${}_1A$ mit umschliesst, durch ihn hindurch geht, oder ob dieser Mittelpunkt ausserhalb der Kugel B liegt, also die drei Fälle

$$\frac{a^2}{2\delta}\lesseqgtr\frac{a^2}{\sqrt{l^2+\delta^2}},$$

oder was dasselbe sagt, die drei Fälle:

$$l\lesseqgtr\delta\sqrt{3}.$$

Im ersten Falle, $l<\delta\sqrt{3}$

$$\text{ist } \vartheta_1^0=\pi-2\,\mathrm{arc\,tng}\,\frac{l}{\delta};\ \vartheta_1'=\pi,$$

und ausserdem bestehen die Gleichungen

$$\varrho\cos\vartheta_1+\frac{a^2}{\sqrt{l^2+\delta^2}}\cos\theta=\frac{a^2}{2\delta}$$

$$\varrho\sin\vartheta_1=\frac{a^2}{\sqrt{l^2+\delta^2}}\sin\theta$$

$$\left(\frac{\partial\varrho}{\partial w}\right)^2=\cos^2(\theta+\vartheta_1).$$

Im zweiten Falle, $l=\delta\sqrt{3}$

$$\text{ist } \vartheta_1^0=\pi-2\,\mathrm{arc\,tng}\,\sqrt{3};\ \vartheta_1'=\frac{\pi}{2}$$

und ausserdem gelten die Gleichungen

$$\varrho \cos \vartheta_1 + \frac{a^2}{\sqrt{l^2+\delta^2}} \cos \theta = \frac{a^2}{2\delta}$$

$$\varrho \sin \vartheta_1 = \frac{a^2}{\sqrt{l^2+\delta^2}} \sin \theta$$

$$\left(\frac{\partial \varrho}{\partial w}\right)^2 = \cos^2 \vartheta_1.$$

Im dritten Falle endlich, $l > \delta\sqrt{3}$ sind die Integrationsgrenzen $\vartheta_1{}^0$ und $\vartheta_1{}'$ in zwei Intervalle zu zerlegen, so dass für die eine Integration nach ϑ_1 auftreten die Grenzen $\vartheta_1{}^0 = 0$, $\vartheta_1{}' = \arcsin \frac{2\delta}{\sqrt{l^2+\delta^2}}$, während für die andere Integration die Grenzen gelten

$$\vartheta_1{}^0 = \pi - 2 \operatorname{arc\,tng} \frac{l}{\delta}, \quad \vartheta_1{}' = \arcsin \frac{2\delta}{\sqrt{l^2+\delta^2}}.$$

Ausserdem gelten die Gleichungen

$$\varrho \cos \vartheta_1 + \frac{a^2}{\sqrt{l^2+\delta^2}} \cos \theta = \frac{a^2}{2\delta}$$

$$\varrho \sin \vartheta_1 = \frac{a^2}{\sqrt{l^2+\delta^2}} \sin \theta$$

$$\left(\frac{\partial \varrho}{\partial w}\right)^2 = \cos^2 (\theta + \vartheta_1).$$

In allen drei Fällen findet sich aus den hingesetzten Gleichungen der Werth von ϱ zu

$$\varrho = \frac{a^2}{\sqrt{l^2+\delta^2}} \frac{\sin \theta}{\sin \vartheta_1}$$

und damit durch Substitution in die je erste Gleichung

$$\sin (\theta + \vartheta_1) = \frac{\sqrt{l^2+\delta^2}}{2\delta} \sin \vartheta_1.$$

Aus welchen beiden Gleichungen man noch findet

$$4, \quad \begin{aligned} \sin \theta &= \sin \vartheta_1 \left(\frac{\sqrt{l^2+\delta^2}}{2\delta} \cos \vartheta_1 \pm \sqrt{1 - \frac{l^2+\delta^2}{(2\delta)^2} \sin^2 \vartheta_1}\right) \\ \varrho &= \frac{a^2}{\sqrt{l^2+\delta^2}} \left(\frac{\sqrt{l^2+\delta^2}}{2\delta} \cos \vartheta_1 \pm \sqrt{1 - \frac{l^2+\delta^2}{(2\delta)^2} \sin^2 \vartheta_1}\right). \end{aligned}$$

Aus diesem Werthe von ϱ ist leicht ersichtlich, dass im ersteren Falle, $l < \delta\sqrt{3}$, nur das obere Vorzeichen zu

verwenden ist, dasselbe gilt für den zweiten Fall, $l = \delta\sqrt{3}$, für welchen sich aber diese Formeln noch vereinfachen zu

$$\sin\theta = \sin 2\vartheta_1;\quad \varrho = 2\frac{a^2}{\sqrt{l^2+\delta^2}}\cos\vartheta_1.$$

Im dritten Falle endlich ist für das Integrationsintervall $\vartheta_1{}^0 = 0$ bis $\vartheta_1' = \arcsin\frac{2\delta}{\sqrt{l^2+\delta^2}}$ das untere, für das Integrationsintervall $\vartheta_1{}^0 = \pi - 2\,\mathrm{arctng}\,\frac{l}{\delta}$ bis $\vartheta_1' = \arcsin\frac{2\delta}{\sqrt{l^2+\delta^2}}$ das obere Vorzeichen zu wählen.

Endlich ist aus den hingeschriebenen Werthen von $\left(\frac{\partial\varrho}{\partial w}\right)^2$ immer das mit positivem Vorzeichen behaftete $\frac{\partial\varrho}{\partial w}$ zu entnehmen.

Um alle drei Fälle gemeinsam weiter behandeln zu können, behalten wir im letzten Ausdruck für die Potentialfunction die Zeichen $\vartheta_1{}^0$ und ϑ_1' bei und setzen

$$\varrho = \frac{a^2}{\sqrt{l^2+\delta^2}}f(\vartheta_1);\ D_1 = D_1(\vartheta_1);\ \frac{\partial\varrho}{\partial w} = [\varphi(\vartheta_1)]^{-1}.$$

Dadurch kann jener Ausdruck für die Potentialfunction auf die Form gebracht werden:

$$2\pi\sum_0^\infty{}_n\left(\frac{\frac{a^2}{2\delta}}{r}\right)^{n+1}P^n(\cos\vartheta_1)$$

$$\int_{\vartheta_1{}^0}^{\vartheta_1'}\left(\frac{\frac{a^2}{\sqrt{l^2+\delta^2}}f(\vartheta_1)}{\frac{a^2}{2\delta}}\right)^n\frac{D_1(\vartheta_1)P^n(\cos\vartheta_1)\left(\frac{a^2}{\sqrt{l^2+\delta^2}}f(\vartheta_1)\right)^2}{\frac{a^2}{2\delta}}\varphi(\vartheta_1)\sin\vartheta_1\,d\vartheta_1$$

$$= \frac{4\pi a^2\delta}{l^2+\delta^2}\sum_0^\infty{}_n\left(\frac{\frac{a^2}{2\delta}}{r}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{2\delta}{\sqrt{l^2+\delta^2}}\right)^n P^n(\cos\vartheta_1)$$

$$\int_{\vartheta_1{}^0}^{\vartheta_1'}(f(\vartheta_1))^{n+2}D_1(\vartheta_1)\varphi(\vartheta_1)P^n(\cos\vartheta_1)\sin\vartheta_1\,d\vartheta_1.$$

Transponiren wir jetzt die innerhalb der Kugel $_1A$ gelegene elektrische Masse auf diese Kugel selbst, so entsteht auf ihr eine neue elektrische Ladung mit der Dichtheit:

$$ {}_1D^2 = \frac{2\delta^2}{l^2+\delta^2} \sum_0^\infty {}_m (2m+1)\, {}_1A_m{}^1 $$

$$ 5, \quad {}_1A_m{}^1 = \left(\frac{2\delta}{\sqrt{l^2+\delta^2}}\right)^m P^m(\cos\vartheta_1) $$

$$ \int_{\vartheta_1{}^0}^{\vartheta_1{}'} [f(\vartheta_1)]^{m+2} \varphi(\vartheta_1) D_1(\vartheta_1) P^m(\cos\vartheta_1) \sin\vartheta_1\, d\vartheta_1. $$

Um weiter die innerhalb der Kugel ${}_2A$ gelegene elektrische Ladung der Kugel B äquivalent auf die Kugel ${}_2A$ zu transponiren, nehmen wir ein neues Polarcoordinatensystem der ϑ_2 und r (oder ϱ) an, dessen Anfang im Mittelpunkt der Kugel ${}_2A$ liegt und dessen Breiten ϑ_2 wir von der Seite der Scheibenaxe an zählen, die nach dem Scheibenmittelpunkte hin gerichtet ist.

Es lässt sich nun die ganze Rechnung, wie im vorigen Falle, wo es sich um die Kugel ${}_1A$ handelte, wiederholen, und die einzigen Aenderungen, welche in der neuen Rechnung auftreten, sind die, dass für das vorige ϑ_1 jetzt ϑ_2 zu schreiben ist, und dass für den vorigen Winkel θ jetzt der Winkel $\pi-\theta$ auftritt. Wir können hiernach ohne weiteres das Endresultat der jetzigen Massentransposition aus 5, ableiten und erhalten auf der Kugel ${}_2A$ eine elektrische Ladung von der Dichtheit:

$$ {}_2D^1 = \frac{2\delta^2}{l^2+\delta^2} \sum_0^\infty {}_m (2m+1)\, {}_2A_m{}^1 $$

$$ 6, \quad {}_2A_m{}^1 = \left(\frac{2\delta}{\sqrt{l^2+\delta^2}}\right)^m P^m(\cos\vartheta_2) $$

$$ \int_{\vartheta_2{}^0}^{\vartheta_2{}'} [f(\vartheta_2)]^{m+2} \varphi(\vartheta_2) D_1(\vartheta_2) P^m(\cos\vartheta_2) \sin\vartheta_2\, d\vartheta_2. $$

Von den beiden durch 5, und 6, bestimmten elektrischen Ladungen der beiden Kugeln ${}_1A$ und ${}_2A$ liegt nun wiederum ein Theil innerhalb des geometrischen Bildes der Scheibe, nämlich der Theil, welcher zugleich innerhalb der Kugel B liegt. Wir transponiren diesen Theil jetzt äquivalent für alle äussern Punkte auf die Kugel B. Wir haben nicht nöthig, wegen dieser Massentransposition eine neue Rechnung anzustellen, sondern können ohne weiteres das Endresultat aus der Gleichung 3, ableiten: Die neue Massenbelegung

von B muss nämlich aus zwei Theilen bestehen, deren einer herkommt von der durch 5, gegebenen Massenvertheilung auf der Kugel $_1A$, so weit sie innerhalb B liegt, deren anderer herkommt von der durch 6, gegebenen Massenvertheilung auf $_2A$, soweit sie innerhalb B liegt. Der erstere Theil kann ganz so aus 5, abgeleitet werden, wie der zweite Theil von D_1 in 3, aus 2, abgeleitet wurde und ist demnach

$$\sum_0^\infty{}_m (2m+1) \varDelta_m{}^1$$

$$\varDelta_m{}^1 = P^m(\cos\theta) \left(\frac{\sqrt{l^2+\delta^2}}{\delta}\right)^m$$

$$\int_{\operatorname{arctng}\frac{l}{\delta}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+1}\theta\, P^m(\cos\theta) \sum_0^\infty{}_n (2n+1)\, {}_1A_n{}^1 \sin\theta d\theta.$$

Ganz ähnlich erhält man auch für den von der Kugel $_2A$ herkommenden Theil, indem man beachtet, dass jetzt, weil $\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ ist, $\varrho = -\frac{a^2}{\delta}\cos\theta$, $\frac{\partial\varrho}{\partial w} = -\cos\theta$ gesetzt werden muss

$$\sum_0^\infty{}_m (2m+1) \varDelta_m{}^2$$

$$\varDelta_m{}^2 = -(-1)^m P^m(\cos\theta) \left(\frac{\sqrt{l^2+\delta^2}}{\delta}\right)^m$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\operatorname{arctng}-\frac{l}{\delta}} \cos^{m+1}\theta\, P^m(\cos\theta) \sum_0^\infty{}_n (2n+1)\, {}_2A_n{}^1 \sin\theta d\theta.$$

Oder da beide Belegungen zusammen die neue gesuchte Belegung der Kugel B bilden, so besitzt diese neue Belegung die elektrische Dichtheit D_2, wenn $\varDelta_m{}^1 + \varDelta_m{}^2 = B_m{}^2$ gesetzt wird

$$D_2 = \sum_0^\infty{}_m (2m+1) B_m{}^2$$

$$7, \quad B_m{}^2 = \left(\frac{\sqrt{l^2+\delta^2}}{\delta}\right)^m P^m(\cos\theta)$$

$$7, \quad \Bigg[\int\limits_{\operatorname{arctng}\frac{l}{\delta}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+1}\theta\, P^m(\cos\theta) \sum_0^\infty {}_n (2n+1)\, {}_1A_n{}^1 \sin\theta\, d\theta$$

$$-(-1)^m \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\operatorname{arctng}-\frac{l}{\delta}} \cos^{m+1}\theta\, P^m(\cos\theta) \sum_0^\infty {}_n (2n+1)\, {}_2A_n{}^1 \sin\theta\, d\theta.\Bigg]$$

Von dieser Belegung der Kugel B ist nun wieder der Theil, der innerhalb der Kugel ${}_1A$ liegt, äquivalent für alle äussern Punkte auf diese Kugel zu transponiren und ebenso der Theil, der innerhalb der Kugel ${}_2A$ liegt, auf die Kugel ${}_2A$; alsdann folgt wieder eine Transposition auf die Kugel B u. s. f. bis die noch zu transponirenden Massen verschwinden. Die Ausführung der Transposition selbst bietet keine Schwierigkeiten mehr dar, da sich die beiden zuletzt ausgeführten Transpositionen immer wiederholen, so dass wir sofort das Endresultat aller Transpositionen hinschreiben können. Es lautet, wenn die Dichtheit der Elektricität auf dem geometrischen Bilde der oberen Scheibenfläche mit ${}_1D$, die auf dem geometrischen Bilde der unteren Scheibenfläche mit ${}_2D$ und die auf dem geometrischen Bilde des Scheibenrandes mit D bezeichnet wird:

$$\left|\begin{array}{l}
{}_1D = -\mu \frac{\delta^2}{a^3 c\pi} \sum_0^\infty {}_m (2m+1)\, A_m \\
\quad + \frac{2\delta^2}{l^2+\delta^2} \sum_0^\infty {}_m (2m+1) \left[{}_1A_m{}^1 + {}_1A_m{}^2 + {}_1A_m{}^3 + \cdots\cdot\right] \\
{}_2D = \frac{2\delta^2}{l^2+\delta^2} \sum_0^\infty {}_m (2m+1) \left[{}_2A_m{}^1 + {}_2A_m{}^2 + {}_2A_m{}^3 + \cdots\cdot\right] \\
D = \frac{l^2+\delta^2}{4a^3\pi} \left(\alpha - \frac{2\mu}{c} \sum_0^\infty {}_m (2m+1)\, B_m{}^1\right) \\
\quad + \sum_0^\infty {}_m (2m+1) \left[B_m{}^2 + B_m{}^3 + B_m{}^4 + \cdots\right] \\
\qquad A_m = \left(\frac{c-2\delta}{c}\right)^m P^m(\cos\vartheta_1)
\end{array}\right.$$

$$8)\left\{\begin{aligned}
&B_m{}^1 = P^m(\cos\theta)\left(\frac{\sqrt{l^2+\delta^2}}{\delta}\right)^m \\
&\int_{\operatorname{arctng}\frac{l}{\delta}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+1}\theta\, P^m(\cos\theta) \sum_0^\infty{}_n (2n+1)\, A_n \sin\theta\, d\theta. \\
&{}_1A_m{}^n = \left(\frac{2\delta}{\sqrt{l^2+\delta^2}}\right)^m P^m(\cos\vartheta_1) \\
&\int_{\vartheta_1{}^0}^{\vartheta_1{}'} [f(\vartheta_1)]^{m+2}\varphi(\vartheta_1)\, D_n(\vartheta_1)\, P^m(\cos\vartheta_1)\sin\vartheta_1\, d\vartheta_1. \\
&{}_2A_m{}^n = \left(\frac{2\delta}{\sqrt{l^2+\delta^2}}\right)^m P^m(\cos\vartheta_2) \\
&\int_{\vartheta_2{}^0}^{\vartheta_2{}'} [f(\vartheta_2)]^{m+2}\varphi(\vartheta_2)\, D_n(\vartheta_2)\, P^m(\cos\vartheta_2)\sin\vartheta_2\, d\vartheta_2. \\
&B_m{}^n = P^m(\cos\theta)\left(\frac{\sqrt{l^2+\delta^2}}{\delta}\right)^m \\
&\Big[\int_{\operatorname{arctng}\frac{l}{\delta}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+1}\theta\, P^m(\cos\theta) \sum_0^\infty{}_u (2u+1)\, {}_1A_u{}^{n-1}\sin\theta\, d\theta \\
&-(-1)^m \int_{\frac{\pi}{2}}^{\operatorname{arctng}-\frac{l}{\delta}} \cos^{m+1}\theta\, P^m(\cos\theta) \sum_0^\infty{}_u (2u+1)\, {}_2A_u{}^{n-1}\sin\theta\, d\theta.\Big]
\end{aligned}\right.$$

Hierbei sind die in den Werthen der A vorkommenden D so zu verstehen, dass z. B. D_n $n > 1$ nur denjenigen Partialwerth von D bedeutet, der aus D hervorgeht, wenn nur die $B_m{}^n$ mit demselben oberen Index ihren Werth behalten, während alle übrigen, ebenso wie das erste Glied des hingeschriebenen Werthes von D verschwinden; dagegen bedeutet D_1 nur denjenigen Partialwerth von D, den das erste hingeschriebene Glied erzeugt.

Man übersieht leicht, dass in den Werthen von ${}_1D$, D und ${}_2D$ der Radius a der Kugel, im Bezug auf welche das geometrische Bild der Scheibe hergestellt wurde, nur vorkommt in dem diesen drei Grössen gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{a^3}$. Bildet man daher das physikalische Bild der mit elek-

trischer Masse in angegebener Weise versehenen Bildfläche, d. h. bestimmt man die Dichtheit der Elektricität im Gleichgewichtszustande auf der Scheibe selbst, so hat man nach §. 3. die in 8, gegebenen Werthe von $_1D$, $_2D$ und D, so weit sie dem eigentlichen geometrischen Bilde der Scheibe angehören, mit $\left(\frac{a}{r}\right)^3$ zu multipliciren, dadurch aber hebt sich der Radius a vollständig fort, und das eigentliche Endresultat der Bestimmung der elektrischen Dichtheit auf der Scheibe ist dasselbe, als ob man in den Formeln 8, statt a, r geschrieben hätte, und diesen Radiusvector irgend eines Scheibenoberflächenpunktes, dessen elektrische Dichtheit man aus den Formeln 8, bestimmen will, gerechnet vom Scheibencentrum aus, bei den Integrationen, die zur Bestimmung der A und B dienen, als constant betrachtete.

Entwickelt man die hiernach durch 8, bestimmte elektrische Dichtheit auf der Kreisscheibe nach Kugelfunctionen im Bezug auf das Coordinatensystem, dessen Anfang im Scheibencentrum lag, so stellen die Entwickelungscoëfficienten von $P_\lambda^n(\cos\theta)e^{i\lambda\varphi}$ gerade die Unbekannten $^n x^\lambda$ des Systemes VI. §. 1. dar.

Setzt man in 8, $\mu = 0$, so erhält man die elektrische Vertheilung auf einer isolirten Kreisscheibe.

Aehnlich wie die Kreisscheibe lassen sich auch alle die Leiter behandeln, welche von ebenen und Kugelflächen begrenzt sind, also z. B. auch Parallelepipede, einander durchdringende Kugeln u. s. w.

Wenn im allgemeinen Falle die geometrische Bildfläche der gegebenen Leiteroberfläche nicht aus lauter Kugelflächen zusammengesetzt ist, so hat die äquivalente Massentransposition nach den in §. 3., 3, β angegebenen Grundsätzen zu erfolgen.

Literatur:

Es ist leicht ersichtlich, dass die verhältnissmässig einfache Lösung des elektrostatischen Fundamentalproblemes, wie sie im vorliegenden Kapitel gegeben wurde, auf dem Satze beruht, „Wenn Elektricität derartig stetig die Oberfläche eines Leiters bedeckt, oder ganz ausserhalb des Leiters liegt, dass ihre Potentialfunction für alle Punkte einer im Innern des Leiters construirten Kugelfläche denselben Werth aufweist, so besitzt

sie diesen Werth auch für alle Punkte im ganzen innern Raume des Leiters." Dieser wichtige Satz ist aber, wie man leicht erkennt, nur eine Specialität des folgenden allgemeinen: „Hat die Potentialfunction V auf einer geschlossenen Oberfläche σ einen constanten Werth, und kommt sie her von Massen, die sämmtlich auf oder ausserhalb dieser Oberfläche liegen, so hat sie denselben Werth auch in dem ganzen Raume, der von der Oberfläche σ umschlossen ist."

Dieser Satz wurde schon in §. 9. Cap. I. dargethan, setzte aber noch voraus, dass die Oberfläche σ als unendlich dünne Flächenschicht aufgefasst werde. An anderer Stelle gedenke ich diesen Satz auch noch frei von dieser Annahme allgemein nachzuweisen.

Auf den ersten specielleren Satz gründete der Verfasser dieselbe Art der Lösung des elektrostatischen Fundamentalproblemes, die im Anfange von §. 3. mitgetheilt wurde und veröffentlichte seine Untersuchungen in Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik; die zweite bequemere Methode zur Lösung des Problemes, nämlich mit Hülfe der äquivalenten Massentransposition erscheint im vorliegenden Kapitel zum ersten Male. Lipschitz zeigte im 61. (und 58.) Bande des Crelle'schen Journales für Mathematik, dass man aus der bekannten Vertheilung der Elektricität im Gleichgewichtszustande über das geometrische Bild eines beliebig gegebenen Leitersystems im Bezug auf eine Kugel leicht auf die Vertheilung der Elektricität auf dem Leitersystem selbst und deren Potentialfunction zurückschliessen kann; doch war dadurch keine wesentliche Vereinfachung in der Lösung des Fundamentalproblemes gewonnen.

Die wichtige Arbeit Neumann's ist an der entsprechenden Stelle dieses Kapitels selbst genauer berücksichtigt worden.

Capitel V.

Die auf elektrisirte Körper ausgeübten Kraftwirkungen.

Wir wenden uns jetzt zur zweiten Hauptaufgabe der Elektrostatik (vergl. §. 2. Cap. II.), nämlich zu der Bestimmung der Kräfte, mit welchen die einzelnen gegebenen elektrischen Körper unterstützt werden müssen, damit sie in der einmal eingenommenen Lage verharren.

Die auf die einzelnen gegebenen elektrischen Körper wirksamen Kräfte kommen theils her von der vorhandenen Elektricität, theils von andern Ursachen, wie z. B. Schwere, mechanische Widerstände etc. Wir haben es hier nur mit der ersteren Art von Kräften zu thun, da die Bestimmung der letzteren in das Gebiet der reinen Mechanik fällt. Kennen wir aber die Kräfte, welche von der auf und in den gegebenen Körpern haftenden Elektricität ausgeübt werden, so brauchen wir nur für irgend einen gegebenen Körper die von der gesammten vorhandenen Elektricität ausgeübte resultirende Kraftwirkung aufzusuchen, und dann den Körper mit einer gleich grossen aber entgegengesetzt wirkenden Kraft zu unterstützen, um das Gleichgewicht zu erhalten. Mit anderen Worten, es kommt die in diesem Kapitel zu behandelnde Aufgabe darauf zurück, die resultirenden Kraftwirkungen aufzusuchen, die von der gesammten vorhandenen Elektricität auf die einzelnen gegebenen Körper in ihrer gegebenen Lage ausgeübt werden.

§. 1.

Die vorhandene Elektricität befindet sich sowohl auf Leitern wie auf Nichtleitern.

Nach dem, was in den beiden vorhergehenden Kapiteln besprochen worden ist, können wir die Art, wie die Elek-

tricität über die Leiter vertheilt ist, als bekannt voraus setzen, während die Vertheilung der Elektricität in den Nichtleitern von vorn herein gegeben sein muss. Hieraus aber folgt ohne weiteres auch das Bekanntsein der Potentialfunction V der gesammten vorhandenen Elektricität auf irgend einen Punkt des Raumes.

Ist nun der Körper, welcher von der ganzen Reihe der eben zur Behandlung vorgelegten elektrischen Körper in specielle Betrachtung gezogen werden soll, ein Nichtleiter, so giebt der §. 1. Cap. I. leicht die Kraft, die auf irgend ein Element des Nichtleiters von der gesammten vorhandenen Elektricität ausgeübt wird und damit auch nach bekannten mechanischen Gesetzen durch Aufsuchung der resultirenden Kraftwirkung die Kräfte, welche an dem Nichtleiter angebracht werden müssen, damit derselbe im Gleichgewichtszustande verharrt.

Ist dagegen der Körper, welcher speciell in Betracht gezogen werden soll, ein Leiter für Elektricität, und sind in seinem Innern keine elektrischen Massen vorhanden, so giebt der Satz 5, §. 4. Cap. II. ohne weiteres die auf die einzelnen Oberflächenpunkte des Leiters wirkenden Kräfte. Sind aber innerhalb des Leiters noch elektrische Massen vorhanden, so haben wir in §. 6. Cap. II. gesehen, dass die Wirkung der auf und innerhalb des Leiters befindlichen Elektricität nach aussen gerade so gross ist, als ob sich die Gesammtsumme dieser Elektricität nur auf der äussern Oberfläche des Leiters befände, für diese äussere Begrenzungsfläche gilt daher das vorhin Bemerkte auch jetzt noch in so fern, als man die innerhalb des Leiters befindlichen elektrischen Massen für den vorliegenden Zweck ganz vernachlässigen kann. Für die Punkte dagegen, welche die innere Höhlungsfläche des Leiters oder der Höhlung selbst angehören, braucht nur diejenige elektrische Wirkung wirklich in Rechnung gezogen zu werden, welche herkommt von der Elektricität, die auf den eben genannten Stellen selbst haftet.

§. 2.
Die vorhandene Elektricität befindet sich nur auf der Oberfläche von Leitern oder in Höhlungen in deren innerem Raume.

Wir betrachten jetzt den Fall speciell, dass ausserhalb einer gegebenen Reihe elektrischer Leiter keine elektrischen Nichtleiter vorkommen, sondern dass, wenn dergleichen überhaupt gegeben sind, sie sich im Innern der Leiterräume befinden, so dass wir, wenn es sich handelt um die Bestimmung der von der vorhandenen Elektricität auf irgend einen der gegebenen Leiter ausgeübten Kraftwirkungen, die im Innern einzelner Leiter etwa vorhandene Elektricität ganz vernachlässigen können, wenn wir nur, wie schon im vorigen Paragraphen erwähnt wurde, die Gesammtsumme der einem solchen Leiter mitgetheilten Elektricität auf seine äussere Oberfläche nach den Anforderungen des Gleichgewichtes vertheilt annehmen.

Ist nun allgemein die auf dem s^{ten} Leiter befindliche unveränderliche Elektricitätsmenge Q_s, so gilt nach §. 7. Cap. II. die Gleichung

$$1, \quad Q_s = \alpha_1 \gamma_{1s} + \alpha_2 \gamma_{2s} + \alpha_3 \gamma_{3s} + \ldots + \alpha_q \gamma_{qs},$$

wenn überhaupt q Leiter vorhanden sind.

Die mit γ bezeichneten Werthe haben hierbei die Eigenschaft, dass allgemein

$$2, \quad \gamma_{rs} = \gamma_{sr}.$$

Bildet man nun das Potential P der im Gleichgewichtszustande über die Leiter vertheilten Elektricität auf sich selbst (vergl. §. 1. Cap. I. am Ende), so ist dieses

$$P = \tfrac{1}{2} \int\int \frac{\varrho \varrho'}{r} \, d\sigma \, d\sigma',$$

wenn ϱ und ϱ' bezeichnen die Dichtheiten der Elektricität an irgend zwei Stellen derselben, oder verschiedener Leiter, und r die Entfernung dieser Stellen von einander bezeichnet, und wenn ferner sowohl die auf σ, als auch die auf σ' bezügliche Integration über alle Leiteroberflächen erstreckt wird. Schreiben wir die vorige Gleichung in der Form

$$P = \tfrac{1}{2}\int \varrho d\sigma \Big\{ \int \frac{\varrho'}{r} d\sigma_1' + \int \frac{\varrho'}{r} d\sigma_2' + \int \frac{\varrho'}{r} d\sigma_3' + \cdots + \int \frac{\varrho'}{r} d\sigma_q' \Big\},$$

indem wir bei der Integration im Bezug auf σ' die Integrationen, welche sich über die einzelnen Leiteroberflächen erstrecken, absondern, so ist leicht ersichtlich, dass der in $\{\ \}$ eingeschlossene Werth gerade die Gesammtpotentialfunction aller zu berücksichtigenden Elektricität darstellt, die für den ersten Leiter constant α_1, für den zweiten $\alpha_2, \ldots$ für den q^{ten} α_q beträgt, es geht daher die vorige Gleichung, wenn wir auch noch die auf σ bezüglichen Integrationen für die einzelnen Leiteroberflächen trennen, in die folgende über

$$P = \tfrac{1}{2}\Big\{\alpha_1 \int \varrho d\sigma_1 + \alpha_2 \int \varrho d\sigma_2 + \alpha_3 \int \varrho\, d\sigma_3 + \cdots + \alpha_q \int \varrho\, d\sigma_q\Big\}.$$

Nun ist aber allgemein

$$Q_s = \int \varrho\, d\sigma_s,$$

folglich entsteht

$$3, \quad P = \tfrac{1}{2}\big\{\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 + \alpha_3 Q_3 + \cdots + \alpha_q Q_q\big\}.$$

Nach §. 1, Cap. I, ist nun die an irgend einem Punkte der Oberfläche eines Leiters angreifende, nach der Richtung t wirkende und von der gesammten vorhandenen Elektricität herkommende Kraft F nichts anderes als

$$4, \quad F = -\frac{\partial P}{\partial t} = -\tfrac{1}{2}\Big\{Q_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + Q_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + \cdots + Q_q \frac{\partial \alpha_q}{\partial t}\Big\}.$$

Nun folgt durch Differentiation der einzelnen unter 1, begriffenen Gleichungen nach t, da allgemein Q_s unveränderlich ist und die Gleichung 2, gilt

$$\alpha_1 \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial t} + \alpha_2 \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial t} + \cdots + \alpha_q \frac{\partial \gamma_{1q}}{\partial t} = -\Big\{\gamma_{11} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \gamma_{12} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + \cdots + \gamma_{1q} \frac{\partial \alpha_q}{\partial t}\Big\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_1 \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial t} + \alpha_2 \frac{\partial \gamma_{22}}{\partial t} + \cdots + \alpha_q \frac{\partial \gamma_{2q}}{\partial t} = -\Big\{\gamma_{12} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \gamma_{22} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + \cdots + \gamma_{2q} \frac{\partial \alpha_q}{\partial t}\Big\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_1 \frac{\partial \gamma_{1q}}{\partial t} + \alpha_2 \frac{\partial \gamma_{2q}}{\partial t} + \cdots + \alpha_q \frac{\partial \gamma_{qq}}{\partial t} = -\Big\{\gamma_{1q} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \gamma_{2q} \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + \cdots + \gamma_{qq} \frac{\partial \alpha_q}{\partial t}\Big\}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_q$, addirt dann sämmtliche entstandene Gleichungen und beachtet die Gleichungen 1, und 2, so wird:

$$\sum_1^q{}_r \sum_1^q{}_s \alpha_r \alpha_s \frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial t} = -\left\{ Q_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + Q_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + Q_3 \frac{\partial \alpha_3}{\partial t} + \cdots + Q_q \frac{\partial \alpha_q}{\partial t} \right\}$$

und damit geht nun die Gleichung 4, über in

$$5, \quad F = \tfrac{1}{2} \sum_1^q{}_r \sum_1^q{}_s \alpha_r \alpha_s \frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial t},$$

womit die vorliegende Aufgabe gelöst ist.

§. 3.

Anwendung der beiden vorhergehenden Paragraphen auf Beispiele.

Wir wenden das, was in §. 1. gelehrt wurde, an auf zwei einander berührende Kugeln aus leitender Substanz und von gleichem Radius, indem wir in der Rechnung dem Vorgange von Thomson[1]) folgen und die Kraft zu bestimmen suchen, mit welcher beide Kugeln sich gegenseitig abstossen. Der Einfachheit wegen setzen wir sowohl den Radius beider Kugeln als auch den Werth der in ihnen constanten Potentialfunction gleich 1, und es wird demnach aus der Tabelle, die wir in §. 6. Cap. III. im Anfange der Wiedergabe von Thomson's Rechnung hinschrieben, wenn wir im Allgemeinen dieselben Zeichen beibehalten und nur dem jetzigen Fall angemessen

$$m_0 = 1; \; \mu_0 = 1; \; a = b = \alpha_1 = \alpha_2 = 1; \; c = 2$$

setzen

$m_0 = 1$	$\mu_0 = 1$	$x_0 = 0$	$\xi_0 = 2$	$y_0 = 0$	$\eta_0 = 2$
$m_1 = -\frac{1}{2}$	$\mu_1 = -\frac{1}{2}$	$x_1 = \frac{1}{2}$	$\xi_1 = \frac{3}{2}$	$y_1 = \frac{1}{2}$	$\eta_1 = \frac{3}{2}$
$m_2 = \frac{1}{3}$	$\mu_2 = \frac{1}{3}$	$x_2 = \frac{2}{3}$	$\xi_2 = \frac{4}{3}$	$y_2 = \frac{2}{3}$	$\eta_2 = \frac{4}{3}$
$m_3 = -\frac{1}{4}$	$\mu_3 = -\frac{1}{4}$	$x_3 = \frac{3}{4}$	$\xi_3 = \frac{5}{4}$	$y_3 = \frac{3}{4}$	$\eta_3 = \frac{5}{4}$
$m_4 = \frac{1}{5}$	$\mu_4 = \frac{1}{5}$	$x_4 = \frac{4}{5}$	$\xi_4 = \frac{6}{5}$	$y_4 = \frac{4}{5}$	$\eta_4 = \frac{6}{5}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

1) l. c. und On the mathematical theory of electricity in Equilibrium. Philos. Magaz. 4e. Serie vol. 8.

Die Abstossung der beiden elektrischen sich berührenden Kugeln ist nun gerade so gross, als ob nur die Massen m_n und μ_n in den Punkten x_n und y_n vorhanden wären; die Entfernung dieser Massen beträgt aber $2 - x_n - y_n$, folglich ist ihre Abstossung oder Anziehung nach dem 2ten Satze in §. 1. Cap. II.

$$\frac{m_n \mu_n}{(2 - x_n - y_n)^2}$$

die Gesammtkraft F, mit der sich beide Kugeln abstossen, ist die Summe aller dieser Einzelkräfte, weil deren Richtungen sämmtlich in die Centrale beider Kugeln entfallen, oder es ist

$$F = \sum \sum \frac{m_n \mu_n}{(2 - x_n - y_n)^2}.$$

Nun ist

$$\sum \frac{\mu_n}{(2 - x_n - y_n)^2} = \frac{1}{(2 - x_n)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{(2 - x_n - \frac{1}{2})^2} + \frac{\frac{1}{3}}{(2 - x_n - \frac{2}{3})^2} - \frac{\frac{1}{4}}{(2 - x_n - \frac{3}{4})^2} \pm \cdots$$

$$= \frac{1}{(2 - x_n)^2} - \frac{2}{(3 - 2x_n)^2} + \frac{3}{(4 - 3x_n)^2} - \frac{4}{(5 - 4x_n)^2} \pm \cdots$$

folglich

$$\begin{aligned}
F = {} & 1 \left\{ \frac{1}{2^2} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^2} - \frac{4}{5^2} \pm \cdots \right\} \\
& - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(\frac{3}{2})^2} - \frac{2}{(\frac{4}{2})^2} + \frac{3}{(\frac{5}{2})^2} - \frac{4}{(\frac{6}{2})^2} \pm \cdots \right\} \\
& + \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{(\frac{4}{3})^2} - \frac{2}{(\frac{5}{3})^2} + \frac{3}{(\frac{6}{3})^2} - \frac{4}{(\frac{7}{3})^2} \pm \cdots \right\} \\
& - \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{(\frac{5}{4})^2} - \frac{2}{(\frac{6}{4})^2} + \frac{3}{(\frac{7}{4})^2} - \frac{4}{(\frac{8}{4})^2} \pm \cdots \right\} \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
= {} & 1 \left\{ \frac{1}{2^2} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^2} - \frac{4}{5^2} \pm \cdots \right\} \\
& - 2 \left\{ \frac{1}{3^2} - \frac{2}{4^2} + \frac{3}{5^2} - \frac{4}{6^2} \pm \cdots \right\} \\
& + 3 \left\{ \frac{1}{4^2} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{6^2} - \frac{4}{7^2} \pm \cdots \right\} \\
& - 4 \left\{ \frac{1}{5^2} - \frac{2}{6^2} + \frac{3}{7^2} - \frac{4}{8^2} \pm \cdots \right\} \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Um diese Reihen zu summiren, gebraucht Thomson das Integral

$$\int_0^1 x^n\, l\,\frac{1}{x}\, dx = \left\{\left[x^{n+1}\, l\,\frac{1}{x}\right]_0^1 + \int_0^1 x^n\, dx\right\}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2},$$

wodurch die Reihe

$$\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{2}{(n+2)^2} + \frac{3}{(n+3)^2} - \frac{4}{(n+4)^2} \pm \cdots$$

$$= \int_0^1 (1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 \pm \cdots)\, x^n\, l\,\frac{1}{x}\, dx = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\, l\,\frac{1}{x}\, dx$$

wird.

Der Werth von F wird somit

$$F = \int_0^1 \left\{1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 \pm \cdots\right\} \frac{x}{(1+x)^2}\, l\,\frac{1}{x}\, dx = \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^4}\, l\,\frac{1}{x}\, dx.$$

Nun ist weiter

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x)^4}\, l\,\frac{1}{x}\, dx = \int_0^1 \left(\frac{lx}{(1+x)^4} - \frac{lx}{(1+x)^3}\right) dx$$

$$= \left[-\tfrac{1}{3}\,\frac{lx}{(1+x)^3} + \tfrac{1}{2}\,\frac{lx}{(1+x)^2}\right]_0^1 + \int_0^1 \left(\frac{1}{3x(1+x)^3} - \frac{1}{2x(1+x)^2}\right) dx.$$

Durch Zerlegung in Partialbrüche findet sich leicht noch der Werth des Integrales der rechten Seite, so dass

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x)^4}\, l\,\frac{1}{x}\, dx = \left[\frac{l\,\frac{1}{x}}{(1+x)^3}\,\frac{3x^2+x^3}{6} + \tfrac{1}{6}\, l(1+x) - \tfrac{1}{6}\,\frac{x}{(1+x)^2}\right]_0^1$$

$$= \tfrac{1}{6}(l2 - \tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{6}(0{,}69315 - 0{,}25) = 0{,}07386.$$

Damit ist aber auch gefunden

$$1, \qquad F = 0{,}07386,$$

die Kraft mit der sich zwei Kugeln abstossen, wenn sie beide den Radius $= 1$ besitzen und so mit Elektricität geladen sind, dass die Potentialfunction derselben im ganzen innern Raume beider Kugeln den Werth $+ 1$ besitzt. Auf

jeder der beiden Kugeln befindet sich alsdann die Elektricitätsmenge

$$Q = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} \mp \cdots = l2 = 0{,}69315.$$

Geht F in F' über, wenn der Werth der Potentialfunction 1 in α und dem entsprechend Q in Q' übergeht, so ist

$$Q' = \alpha Q = \alpha l2 \text{ also } \alpha = \frac{Q'}{l2}$$

und es ist leicht ersichtlich, dass dann auch

$$F' = \alpha^2 F = \left(\frac{Q'}{l2}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{6}\,(l2 - \tfrac{1}{4})$$

oder 2, $F' = Q'^2 \frac{0{,}07386}{(0{,}69315)^2} = Q'^2 .\ 0{,}15372.$

Wir wenden uns nun zu dem allgemeineren Falle, dass die Kraft aufgesucht werden soll, mit der sich zwei Kugeln von gleichem Radius $= 1$ gegenseitig anziehen oder abstossen, wenn sie einander nicht berühren und mit beliebigen Elektricitätsmengen geladen sind. Wir verwenden hierzu die Formel 4, in §. 2. und erhalten, indem wir die Differentiation nach dem Centralabstande c geschehen lassen, da die Resultante nothwendig in die Richtung der Centrale entfallen muss.

$$3, \quad F = -\tfrac{1}{2}\left(Q_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial c} + Q_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial c}\right).$$

Nach 51, §. 7. Cap. III. ist, da $a = b = 1$ dort zu setzen ist

$$Q_1 = \alpha_1 p - \alpha_2 q$$
$$Q_2 = \alpha_2 p - \alpha_1 q$$

folglich, wenn wir diese Gleichungen nach c differentiiren

$$0 = \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial c} + p \frac{\partial \alpha_1}{\partial c} - \alpha_2 \frac{\partial q}{\partial c} - q \frac{\partial \alpha_2}{\partial c}$$

$$0 = \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial c} + p \frac{\partial \alpha_2}{\partial c} - \alpha_1 \frac{\partial q}{\partial c} - q \frac{\partial \alpha_1}{\partial c}$$

und zur Abkürzung setzen

$$4, \quad U = \frac{\alpha_1 p + \alpha_2 q}{p^2 - q^2}, \quad W = \frac{\alpha_1 q + \alpha_2 p}{p^2 - q^2}$$

$$
5, \quad \begin{aligned} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial c} &= U \frac{\partial p}{\partial c} - W \frac{\partial q}{\partial c} \\ - \frac{\partial \alpha_2}{\partial c} &= W \frac{\partial p}{\partial c} - U \frac{\partial q}{\partial c}. \end{aligned}
$$

Substituirt man die Werthe von $\frac{\partial \alpha_1}{\partial c}$ und $\frac{\partial \alpha_2}{\partial c}$ aus 5, in 3, so entsteht

$$
6, \quad F = \tfrac{1}{2} \left\{ (Q_1 U + Q_2 W) \frac{\partial p}{\partial c} - (Q_1 W + Q_2 U) \frac{\partial q}{\partial c} \right\}.
$$

Substituirt man noch die Werthe von Q_1 und Q_2, so wird

$$
7, \quad F = \tfrac{1}{2} \left\{ (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \frac{\partial p}{\partial c} - 2 \alpha_1 \alpha_2 \frac{\partial q}{\partial c} \right\}.
$$

Dagegen folgt aus den Q_1 und Q_2 bestimmenden Gleichungen

$$
\alpha_1 = \frac{Q_1 p + Q_2 q}{p^2 - q^2}; \quad \alpha_2 = \frac{Q_1 q + Q_2 p}{p^2 - q^2}
$$

folglich ist auch

$$
U = \frac{(p^2 + q^2) Q_1 + 2 pq Q_2}{(p^2 - q^2)^2}; \quad W = \frac{(p^2 + q^2) Q_2 + 2 pq Q_1}{(p^2 - q^2)^2}.
$$

Die Gleichung 6, kann daher auch auf die Form gebracht werden

$$
8, \quad F = \frac{1}{2 (p^2 - q^2)^2} \Big\{ ([p^2 + q^2][Q_1^2 + Q_2^2] + 4 pq Q_1 Q_2) \frac{\partial p}{\partial c} \\ - (2 pq (Q_1^2 + Q_2^2) + 2 (p^2 + q^2) Q_1 Q_2) \frac{\partial q}{\partial c} \Big\}.
$$

Setzen wir noch zur Abkürzung

$$
9, \quad \begin{aligned} \frac{p^2 + q^2}{(p^2 - q^2)^2} \frac{\partial p}{\partial c} - 2 \frac{pq}{(p^2 - q^2)^2} \frac{\partial q}{\partial c} &= H \\ \frac{p^2 + q^2}{(p^2 - q^2)^2} \frac{\partial q}{\partial c} - 2 \frac{pq}{(p^2 - q^2)^2} \frac{\partial p}{\partial c} &= K, \end{aligned}
$$

so wird aus der Gleichung 8, noch

$$
10, \quad F = \tfrac{1}{2} [(Q_1^2 + Q_2^2) H - 2 Q_1 Q_2 K].
$$

Aus den erlangten Resultaten ziehen wir noch folgende specielle Resultate:

1) Sind die Werthe α_1 und α_2 der Potentialfunction einander gleich, so ergiebt 7,

$$
F' = \alpha_1^2 \left(\frac{\partial p}{\partial c} - \frac{\partial q}{\partial c} \right) \qquad (\alpha_1 = \alpha_2)
$$

eine Anziehung oder Abstossung proportional dem Quadrate des Werthes der Potentialfunction in beiden Kugeln.

2) Ist eine der beide Kugeln zur Erde abgeleitet, also etwa $\alpha_2 = 0$, so giebt 7,

$$F'' = \frac{1}{2}\,\alpha_1^2 \frac{\partial p}{\partial c} \qquad (\alpha_2 = 0).$$

Da nun, wie man sich leicht überzeugen kann, $\frac{\partial p}{\partial c}$ sowohl als auch $\frac{\partial q}{\partial c}$ immer negativ ist, so strebt im vorliegenden Falle also F'' immer den Abstand beider Kugeln zu verringern oder mit andern Worten, zwei leitende gleich grosse elektrisirte Kugeln, von denen die eine zur Erde abgeleitet ist, ziehen sich immer an, wie auch sonst ihre Entfernung oder ihre elektrische Ladung beschaffen sein mag.

3) Ist $Q_1 = Q_2 = Q$, so folgt aus 10,

$$F''' = Q^2\,(H - K), \qquad (Q_1 = Q_2 = Q).$$

Zwei gleich grosse leitende Kugeln, die mit gleichen Elektricitätsmengen geladen sind, stossen demnach einander ab oder ziehen einander an mit einer Kraft, die proportional dem Quadrat der Ladung jeder einzelnen Kugel ist.

Es ist ferner nach 9,

$$H - K = \frac{1}{(p-q)^2}\left(\frac{\partial p}{\partial c} - \frac{\partial q}{\partial c}\right)$$

und wie man sich leicht überzeugen kann, ist der absolute Werth von $\frac{\partial p}{\partial c}$ kleiner als der von $\frac{\partial q}{\partial c}$, folglich ist $H - K$ immer positiv oder zwei gleich grosse leitende elektrische Kugeln, die mit gleichen Quantitäten geladen sind, stossen sich stets ab.[1])

Aus der vorigen Gleichung folgt auch

$$H - K = \frac{1}{(p-q)^2}\,\frac{\partial}{\partial c}\,(p - q) = -\,\frac{\partial}{\partial c}\,(p - q)^{-1}$$

und demnach

$$F''' = -\,Q^2\,\frac{\partial}{\partial c}\,(p - q)^{-1} \qquad (Q_1 = Q_2 = Q).$$

---

1) Dieses Resultat ist wichtig für die Messungen mit der Coulombschen Drehwage.

4) Ist eine der beiden Kugeln ursprünglich nicht geladen, und etwa $Q_2 = 0$, so folgt aus 10,

$$F'''' = \frac{1}{2} Q_1^2 H \qquad (Q_2 = 0)$$

und ergiebt stets Anziehung, da immer $H < 0$.

5) Haben beide Kugeln ursprünglich elektrische Ladungen entgegengesetzter Art erhalten, und ist etwa $Q_1 > 0$, $Q_2 < 0$, so folgt, wenn wir unter Q_1' und Q_2' die Ladungen ihrem absoluten Werthe nach verstehen

$$F^v = \frac{1}{2} [(Q_1'^2 + Q_2'^2) H + 2 Q_1' Q_2' K].$$

Da H sowohl wie K immer negativ ist, so existirt in diesem Falle nur Anziehung.

6) Haben die Kugeln ursprünglich gleichnamige elektrische Ladungen erhalten, so folgt aus 10, dass es einen gewissen Abstand beider Kugeln giebt, in welchem sie einander weder anziehen noch abstossen, nämlich wenn die Bedingung erfüllt ist

$$(Q_1^2 + Q_2^2) H = 2 Q_1 Q_2 K,$$

oder nach 7, wenn

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \frac{\partial p}{\partial c} = 2 \alpha_1 \alpha_2 \frac{\partial q}{\partial c}.$$

Dies- und jenseits dieser Entfernung wechselt die Kraft F^v offenbar ihren Sinn so, dass sie bei grösserer Entfernung in Abstossung, bei kleinerer in Anziehung übergeht.

Wir schliessen diese Betrachtungen, indem wir die Tabellen folgen lassen, welche Thomson zur Bestimmung der Kraft F berechnete, indem er theils die Gleichung 7, theils die Gleichung 10, zu Grunde legte und zugleich das Verhältniss $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ oder $\frac{Q_1}{Q_2}$ angab, für welches die Kraft F verschwindet. Die Radien beider Kugeln sind natürlich gleich gross und jeder gleich der Einheit vorausgesetzt; c bedeutet den Mittelpunktsabstand der Kugeln.

Tafel zur Berechnung von F mittels α_1 und α_2.

c	α_1	α_2	$-\frac{1}{2}\frac{\partial \alpha_1}{\partial c}$	$-\frac{1}{2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial c}$	Verhältniss von $\alpha_1 : \alpha_2$ für welches $F=0$.
2,1	1,58396	0,88175	1,13844	1,17439	0,77828
2,2	1,43131	0,72378	0,52852	0,56350	0,69637
2,3	1,34827	0,63395	0,32917	0,36357	0,63553
2,4	1,29316	0,57202	0,23159	0,26464	0,58975
2,5	1,25324	0,52537	0,17432	0,20630	0,55888
2,6	1,22218	0,48819	0,13696	0,16787	0,51699
2,7	1,19755	0,45746	0,11082	0,14090	0,47805
2,8	1,17738	0,43140	0,09174	0,12073	0,46049
2,9	1,16056	0,40886	0,07720	0,10526	0,43667
3,0	1,14629	0,38908	0,06592	0,09299	0,41567
3,1	1,13404	0,37151	0,05693	0,08304	0,39672
3,2	1,12340	0,35575	0,04963	0,07481	0,37947
3,3	1,11410	0,34150	0,04363	0,06791	0,36376
3,4	1,10588	0,32852	0,03863	0,06203	0,34939
3,5	1,09859	0,31663	0,03441	0,05697	0,33615
3,6	1,09208	0,30569	0,03084	0,05257	0,32418
3,7	1,08623	0,29557	0,02775	0,04872	0,31263
3,8	1,08095	0,28617	0,02509	0,04531	0,30211
3,9	1,07617	0,27742	0,02278	0,04229	0,29233
4,0	1,07182	0,26924	0,02075	0,03958	0,28318

Tafel zur Berechnung von F mittels Q_1 und Q_2.

c	$\frac{p}{p^2-q^2}$	$\frac{q}{p^2-q^2}$	$-\frac{1}{2}H$	$-\frac{1}{2}K$	Verhältniss von $Q_1 : Q_2$ für welches $F=0$.
2,1	0,91482	0,50926	0,15375	0,22668	0,39102
2,2	0,93869	0,47467	0,08263	0,15251	0,29435
2,3	0,95220	0,44782	0,05444	0,12186	0,23580
2,4	0,96142	0,42528	0,03955	0,10309	0,19944
2,5	0,96829	0,40599	0,02997	0,09038	0,16908
2,6	0,97354	0,38888	0,02342	0,08078	0,14476
2,7	0,97771	0,37318	0,01849	0,07341	0,12786
2,8	0,98105	0,35946	0,01500	0,06710	0,11318
2,9	0,98376	0,34658	0,01222	0,06186	0,09971
3,0	0,98598	0,33467	0,01010	0,05731	0,08877
3,1	0,98782	0,32361	0,00842	0,05333	0,07944
3,2	0,98934	0,31327	0,00708	0,04981	0,07139
3,3	0,99067	0,30366	0,00599	0,04666	0,06442
3,4	0,99178	0,29462	0,00510	0,04382	0,05839
3,5	0,99272	0,28612	0,00437	0,04126	0,05298
3,6	0,99351	0,27810	0,00378	0,03891	0,04868
3,7	0,99423	0,27054	0,00326	0,03679	0,04349
3,8	0,99484	0,26338	0,00283	0,03484	0,04061
3,9	0,99537	0,25659	0,00247	0,03305	0,03736
4,0	0,99583	0,25015	0,00216	0,03139	0,03444

Literatur. Die wichtigen hier einschlagenden Arbeiten Thomson's sind an den entsprechenden Stellen selbst citirt worden.

Die ganz allgemeine Behandlung des §. 2. findet sich in „Betti, teorica delle forze che agoniscono secondo la legge di Newton," XIV.

Capitel VI.

Einige Folgerungen aus den bisher erlangten theoretischen Resultaten der Elektrostatik.

In diesem Kapitel soll noch die Beantwortung einiger Fragen stattfinden, die sich zwar schon früher darboten, deren Berücksichtigung aber verschoben werden musste, weil ihre Beantwortung auch noch auf andere Umstände Rücksicht nehmen muss als die sind, auf die allein die ganze bisherige Theorie der Elektrostatik gegründet werden konnte (vergl. §. 1. Cap. II.).

§. 1.

Betrachtung der Kräfte, durch welche ein elektrischer Leiter in seinem elektrischen Zustande erhalten wird.

In §. 4. Cap. II. haben wir gesehen, dass jedes Theilchen einer elektrischen Ladung, die sich auf der Oberfläche eines isolirten Leiters im Gleichgewicht befindet, mit einer Kraft in der Richtung der Normale nach aussen getrieben wird, die proportional ist dem Quadrate der elektrischen Dichtheit an der betreffenden Stelle des Leiters. Soll nun, wie die Erfahrung ohne weiteres lehrt, trotzdem die Elektricität auf dem Leiter festgehalten werden, so ist diess nur dadurch möglich, dass eine gleich grosse entgegengesetzt gerichtete Kraft jedes Elektricitätstheilchen in seiner betreffenden Lage festhält. Diese Kraft können wir uns, wie überhaupt Kräfte in der Physik, nur als Zug- oder Druckkraft denken und es entseht nun die Frage, zwischen welchen Körpern diese Kraft entstehe.

Die Antwort hierauf kann nur so lauten, dass die betreffende Kraft entweder nur zu suchen sei α) bei den ponderablen Theilchen der Leitermasse, derart, dass sie die Elektricität anzieht, oder β) dass sie nur eine Abstossung sei, die stattfindet zwischen den Theilchen des umgebenden Nichtleiters, oder γ) dass beide Arten von Kräften gleichzeitig wirken oder endlich δ) dass diese Kraft in der Gegenwart einer noch unbekannten Substanz ihren Ursprung habe.

Sehen wir zu, welcher dieser Fälle statthaft sei.

α) Es werde die Elektricität auf elektrischen Leitern festgehalten nur durch eine Zugkraft, die ausgeht von den ponderablen Massentheilchen des elektrischen Leiters. In diesem Falle bilden die Kräfte, welche die Elektricität eines elektrischen Leiters fortzutreiben und festzuhalten suchen, ein System innerer Kräfte für den elektrischen Leiter und können als solche nach bekannten mechanischen Grundsätzen keine Bewegung des Schwerpunktes des Leiters veranlassen; dem steht aber entgegen die Erscheinung am Hamilton'schen[1]) Spitzenrad namentlich in der Einrichtung, wie sie Riess[2]) angegeben hat.

β) Es werde die Elektricität auf den Leitern festgehalten nur durch eine Druckkraft, die ausgeht von den Theilchen des den elektrischen Leiter umgebenden isolirenden Mediums. In diesem Falle muss es unmöglich sein, einen Leiter im Vacuum zu elektrisiren; dem stehen aber, neben älteren Versuchen von Walsh, Morgan, Erman, Davy, die im Toricelli'schen Vacuum angestellt wurden[3]), neuerdings namentlich auch zahlreiche Resultate entgegen, welche die Versuche mit Geissler'schen Röhren ergaben.

Es bleiben daher nur die unter γ) und δ) gegebenen Antworten auf die gestellte Frage zulässig, die wir, mit Rücksicht auf das eben unter α) und β) Besprochene dahin genauer aussprechen können: Abgesehen von den Kräften, die als Zug- oder Druckkräfte wirkend, die Elektricität auf einem geladenen isolirten Leiter im Gleichgewichtszu-

1) Philos. transart. 1760. abridge II. 505.

2) Die Lehre von der Reibungselektricität, Bnd. II, §. 695.

3) Vergl. Riess, die Lehre von der Reibungselektricität Bnd. I, §§. 34, 35, 36.

stande mit erhalten und von einer noch unbekannten Substanz herkommen, kann die Erhaltung des elektrischen Gleichgewichts durch Zugkräfte, welche ihren Ursprung in der Leitermasse selbst haben, geschehen und befindet sich der elektrische Leiter in einem nicht leitenden Medium, so gehen auch von diesem Druckkräfte aus, welche das elektrische Gleichgewicht erhalten helfen. — Da möglicher Weise für gewöhnlich sämmtliche drei angeführte Arten von Kräften bei der Erhaltung des elektrischen Gleichgewichtes thätig sind, so können nur quantitative Bestimmungen über deren Natur Klarheit verschaffen. Hierbei entziehen sich aber die zwischen der ponderablen Leitermasse und deren elektrischer Ladung thätigen Zugkräfte als innere Kräfte für den betreffenden geladenen Leiter der Beobachtung, so dass nur die vom isolirenden Medium herkommenden Druckkräfte über die Natur der in Rede stehenden Kräfte Aufschluss geben können, weil sie es bis jetzt allein sind, die näherungsweise der Rechnung unterworfen werden können und weil sie zugleich als äussere Kräfte sich durch eine bestimmte Kraftwirkung am elektrischen Leiter, oder wenn dieser beweglich aufgehangen ist, durch eine bestimmte Einstellung desselben bemerklich machen müssen.

Um nun die vom isolirenden Medium herkommenden Druckkräfte zu bestimmen, denken wir uns, dass ein elektrischer Leiter in einer isolirenden Flüssigkeit, mag diese nun tropfbar flüssig oder elastisch flüssig sein, befindlich sei. Da diese Flüssigkeit keine vollkommen isolirende Substanz ist (vergl. Cap. II. §. 1.), so werden die Theilchen der isolirenden Flüssigkeit, welche den elektrischen Leiter berühren, merklich durch directe Mittheilung elektrisch und nehmen, wenn ϱ die elektrische Dichtheit des Leiters bezeichnet, eine Elektricitätsmenge auf, die ϱ proportional ist. Sei also die Elektricitätsmenge, welche ein isolirendes Flüssigkeitstheilchen, welches einen elektrischen Leiter im Flächenelemente $d\sigma$ berührt, $k\varrho$, wenn die elektrische Dichtheit des Leiters im Oberflächenelemente $d\sigma$ ϱ ist; so ist nun k ein Factor, dessen Werth von der Natur des isolirenden Mediums und von der Dauer der Berührung abhängt.

Das elektrisch gewordene Theilchen des isolirenden

Mediums wird nun nothwendig abgestossen in der Richtung der Normale im Oberflächenelemente $d\sigma$ und da weiter sich das abgestossene Theilchen der isolirenden Flüssigkeit in unmittelbarer Nachbarschaft des elektrischen Leiters befindet, so würde die Grösse der abstossenden Kraft, wenn es die elektrische Masse $= 1$ besässe, nach §. 4. Cap. II. No. 5 $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} d\sigma$ sein, da es aber die elektrische Masse $k\varrho$ besitzt, so ist die wirklich ausgeübte abstossende Kraft $k\varrho\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} d\sigma$, oder nach §. 4. Cap. II. No. 5 $4\pi k\varrho^2 d\sigma$. Umgekehrt übt das abgestossene Flüssigkeitstheilchen auf den elektrischen Leiter einen Druck g aus, der normal zum Oberflächenelement $d\sigma$ gerichtet die Grösse

$$1, \quad g = -4\pi k\varrho^2 d\sigma$$

besitzt. Eine solche Kraft g kommt her von jedem dem Leiter benachbarten Flüssigkeitstheilchen. Die Geschwindigkeit, mit der jedes Flüssigkeitstheilchen in Folge dessen von dem elektrischen Leiter sich entfernt, hängt ab, ausser von der Grösse der Kraft g noch von der Masse des Theilchens, von dem Widerstande, den die den Leiter umgebende Flüssigkeit der Bewegung des Theilchens entgegensetzt und auch von der Art, wie schnell das Theilchen die ihm vom Leiter mitgetheilte Elektricität an benachbarte Flüssigkeitstheilchen abgeben kann, weil sich nach dem letzteren Umstande die Kraft richtet, die sowohl von Seiten des elektrischen Leiters als auch von den übrigen elektrisch gewordenen Theilchen des isolirenden Mediums auf das eben betrachtete Flüssigkeitstheilchen ausgeübt werden.

Wir nehmen an, dass die Flüssigkeit so gut isolire, dass sowohl diese letztere Kraft, als auch, was für uns weit wichtiger ist, die Kraft vernachlässigt werden kann, die thätig ist zwischen den bereits fortbewegten Flüssigkeitstheilchen und dem elektrischen Leiter.

Hat sich nun die erste dem elektrischen Leiter benachbarte Schicht der isolirenden Flüssigkeit, wie oben beschrieben wurde, vom Leiter entfernt, so tritt, in Folge des hydro- oder aëro-statischen Druckes eine neue, bisher unelektrische (oder verschwindend wenig elektrische) an ihre Stelle und

erleidet dasselbe. Dieses Spiel erfolgt sehr oft in sehr kurzer Zeit.

Ist nun die Geschwindigkeit, mit der sich jedes einzelne elektrisch gewordene Flüssigkeitstheilchen vom elektrischen Leiter entfernt, so klein, und umgekehrt der hydrostatische Druck der Flüssigkeit so gross, dass der Zustand des den Leiter umgebenden isolirenden Mediums hinsichtlich seiner Dichte als unveränderlich betrachtet werden kann, so haben wir es hier noch in gewissem Sinne mit einer Frage der Elektrostatik zu thun (im entgegengesetzten Falle würde die Frage unbedingt der Elektrodynamik zuzuweisen sein), und es handelt sich nun darum, die Kraft zu bestimmen, die in Folge der eben beschriebenen Erscheinung von aussen auf den elektrischen Leiter wirkt, wenn wir noch die aufgezählten die Rechnung wesentlich vereinfachenden Bedingungen festhalten.

Schliesst die oben genannte Kraft g mit einer gewissen gegebenen festen Richtung den Winkel ϑ ein, so ist die in diese Richtung entfallende Componente von g

$$-4\pi k \varrho^2 \cos\vartheta \, d\sigma$$

und daher die Grösse der gesammten in jener Richtung auf den elektrischen Leiter von Seiten des isolirenden Mediums ausgeübte Kraft K

$$2, \qquad K = -4\pi k \int \varrho^2 \cos\vartheta \, d\sigma,$$

wenn die Integration sich erstreckt über die ganze Oberfläche des elektrischen Leiters und ϑ den Winkel bezeichnet, den die auf der Oberfläche des Leiters im Flächenelement $d\sigma$ mit der elektrischen Dichtheit ϱ errichtete Normale mit der Richtung einschliesst, in welcher die Kraft K thätig ist.

Vermittels der Gleichung 2, ist es leicht, die bekannten 6 Grundgleichungen für das mechanische Gleichgewicht aufzustellen.

Wir ziehen aus der Gleichung 2, folgende specielle Resultate:

Da die in 2, vorkommende elektrische Ladung des Leiters nur in der Form ϱ^2, also unabhängig vom Vorzeichen vorkommt, so folgt:

Die von einer isolirenden Flüssigkeit auf einen elektrischen Leiter ausgeübte Kraft ist unabhängig von der Art der Elektricität, wenn der Coëfficient k es ist.

Wir könnten hieraus folgern, die Zerstreuung der Elektricität eines elektrischen Leiters ist unabhängig von der Art der Elektricität, wenn uns der Begriff „Zerstreuung der Elektricität" nicht zu unbestimmt wäre.

Befinden sich in der isolirenden Flüssigkeit zugleich mehrere Leiter, so hängt ϱ von der gegenseitigen Stellung derselben ab und somit auch K.

Hieraus erklärt es sich, warum das vorzüglichste elektrostatische Instrument, die Torsionswage, nur brauchbare Werthe ergiebt, wenn die bewegliche Kugel immer in dieselbe, möglichst grosse, Entfernung von der Standkugel gebracht wird.

Das in der Gleichung 2, vorkommende Produkt $\cos\vartheta d\sigma$ stellt dar die Projection des Flächenelementes $d\sigma$ auf eine Ebene, die senkrecht zur Richtung der Kraft K liegt. Die sämmtlichen Projectionen $\cos\vartheta\, d\sigma$ können gedacht werden als gelegen zu beiden Seiten dieser Ebene, wenn diese mitten durch den Leiter hindurchgelegt wird. Denkt man sich die Projectionen wirklich ausgeführt und auf jedem Element der Projection $\cos\vartheta\, d\sigma$ eine Senkrechte errichtet, deren Länge gleich oder proportional $-4\pi k\varrho^2$ ist, so begrenzen die Endpunkte dieser Senkrechten zugleich mit den Projectionen $\cos\vartheta\, d\sigma$ zwei Räume; die Differenz der Volumina dieser Räume ist gleich der Kraft K.

Hieraus ergiebt sich noch sehr leicht, dass für alle diejenigen Leiter, welche allein und isolirt sich in einer isolirenden Flüssigkeit befinden und Symmetrieebenen besitzen, alle diejenigen Kräfte K verschwinden, welche normal zu den Symmetrieebenen gerichtet sind, weil jene Symmetrieebenen auch Symmetrieebenen der Function $-4\pi k\varrho^2$ sind, also die genannten Volumina einander gleich werden. Für eine Kugel z. B. verschwinden sämmtliche Kräfte K, nach welcher Richtung sie auch genommen sein mögen.

§. 2.
Anwendung der Resultate des vorigen Paragraphen auf zwei isolirt in Luft aufgehangene Kugeln.

Es möge jetzt speciell der Fall betrachtet werden, wie er z. B. an der Torsionswage gegeben ist, nämlich der, dass von zwei isolirt in Luft befindlichen Kugeln die eine Kugel, die sogenannte Standkugel, unverrückbar fest steht, während die andere Kugel in veränderliche Entfernungen von der ersten Kugel treten kann; es ist zu bestimmen, wie gross die Kraftwirkung ist, die rückwärts von der umgebenden Luft auf die bewegliche Kugel ausgeübt wird. Da für irgend einen Stand der beweglichen Kugel die Centrallinie beider Kugeln eine Symmetrielinie auch für die Vertheilung der Elektricität auf der beweglichen Kugel ist, so müssen nach dem letzten Satze in §. 1. alle diejenigen Kräfte K verschwinden, welche nicht in die Richtung der Centrallinie entfallen. Wir haben, mit anderen Worten, um die Einwirkung des isolirenden Mediums auf die bewegliche Kugel zu bestimmen, nur diejenige Kraft K aufzusuchen, welche in die Richtung der Centrallinie entfällt und können uns als Angriffspunkt derselben den Kugelmittelpunkt denken. Diese Kraft ist aber nach Gleichung 2, §. 1.

$$1, \quad K = -4\pi k \int \varrho^2 \cos\theta_1 \, d\sigma,$$

wenn θ_1 den Winkel bezeichnet, den der Radiusvector der beweglichen Kugel mit der Centrallinie einschliesst.

Nehmen wir, um die früheren Formeln 49, und 50, §. 6. Cap. III. benützen zu können, zur beweglichen Kugel die Kugel A, so finden wir mit Hülfe der genannten Gleichen, wenn wir die Bedeutung der früheren Zeichen beibehalten:

$$\varrho = \varrho_a = -\frac{1}{4\pi}\left\{ 2\left(\frac{\partial V_a}{\partial r_1}\right)_{r_1=a} + \left(\frac{V_a}{a}\right)_{r_1=a}\right\},$$

wenn

$$2, \quad V_a = ab\alpha_1 \sum_0^\infty {}_n \frac{1}{\sqrt{a_n^2 r_1^2 - 2a_n b_n a r_1 \cos\theta_1 + b_n^2 a^2}}$$

$$- a b \alpha_2 \sum_0^\infty {}^n \frac{1}{\sqrt{a_n'^2 r_1^2 - 2 a_n' b_n' a r_1 \cos\theta_1 + b_n'^2 a^2}}$$

$$2, \quad \begin{aligned} a_n &= a \frac{\alpha'^n - \alpha''^n}{\alpha' - \alpha''} + b \frac{\alpha'^{n+1} - \alpha''^{n+1}}{\alpha' - \alpha''} \\ b_n &= c \frac{\alpha'^n - \alpha''^n}{\alpha' - \alpha''} \\ a_n' &= c \frac{\alpha'^{n+1} - \alpha''^{n+1}}{\alpha' - \alpha''} \\ b_n' &= a \frac{\alpha'^{n+1} - \alpha''^{n+1}}{\alpha' - \alpha''} + b \frac{\alpha'^n - \alpha''^n}{\alpha' - \alpha''} \end{aligned}$$

Hiernach wird

$$3, \quad \begin{aligned} \varrho = \frac{ab}{4\pi} \Big\{ & \alpha_1 \sum_0^\infty {}^n \frac{a_n^2 - b_n^2}{\sqrt{(a_n^2 + b_n^2) - 2 a_n b_n \cos\theta_1}^3} \\ & - \alpha_2 \sum_0^\infty {}^n \frac{a_n'^2 - b_n'^2}{\sqrt{(a_n'^2 + b_n'^2) - 2 a_n' b_n' \cos\theta_1}^3} \Big\}. \end{aligned}$$

Ist ferner zur Abkürzung

$$4, \quad \begin{aligned} a_n^2 - b_n^2 &= g_n^2; \; a_n'^2 - b_n'^2 = g_n'^2 \\ a_n^2 + b_n^2 &= h_n^2; \; a_n'^2 + b_n'^2 = h_n'^2, \end{aligned}$$

so erhält man aus der Gleichung 3,

$$\varrho^2 = \frac{a^2 b^2}{(4\pi)^2}$$

$$5, \quad \begin{aligned} \Big\{ & \alpha_1^2 \sum_0^\infty {}^n \sum_0^\infty {}^m \frac{g_n^2 g_m^2}{\sqrt{(h_n^2 - 2 a_n b_n \cos\theta_1)(h_m^2 - 2 a_m b_m \cos\theta_1)}^3} \\ & - 2 \alpha_1 \alpha_2 \sum_0^\infty {}^n \sum_0^\infty {}^m \frac{g_n^2 g_m'^2}{\sqrt{(h_n^2 - 2 a_n b_n \cos\theta_1)(h_m'^2 - 2 a_m' b_m' \cos\theta_1)}^3} \\ & + \alpha_2^2 \sum_0^\infty {}^n \sum_0^\infty {}^m \frac{g_n'^2 g_m'^2}{\sqrt{(h_n'^2 - 2 a_n' b_n' \cos\theta_1)(h_m'^2 - 2 a_m' b_m' \cos\theta_1)}^3} \Big\}. \end{aligned}$$

Setzen wir den Werth von ϱ^2 aus 5, in die Gleichung 1, welche auch geschrieben werden kann

$$K = - 4\pi k \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \varrho^2 \cos\theta_1 \, a^2 \sin\theta_1 \, d\theta_1 \, d\varphi_1$$

ein, so kann die Integration nach φ_1 ohne weiteres ausgeführt werden, so dass entsteht:

$$6, \quad K = -8a^2\pi^2 k \int_0^\pi \varrho^2 \cos\theta_1 \sin\theta_1 \, d\theta_1 .$$

Die noch übrige Integration kann leicht ausgeführt werden mit Hülfe der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial \cos\theta_1}\left\{\frac{1}{\sqrt{A-2B\cos\theta_1+C\cos^2\theta_1}}\,\frac{B\cos\theta_1-A}{AC-B^2}\right\} = \frac{\cos\theta_1}{\sqrt{A-2B\cos\theta_1+C\cos^2\theta_1}^{\,3}},$$

so dass man z. B. erhält

$$\int_0^\pi \frac{g_m^2\, g_n^2 \cos\theta_1 \sin\theta_1 \, d\theta_1}{\sqrt{A-2B\cos\theta_1+C\cos^2\theta_1}^{\,3}} = 2\,\frac{a_n b_m + a_m b_n}{(a_m a_n - b_m b_n)^2}.$$

Demnach erhalten wir

$$K = -a^4 b^2 k \left\{ \alpha_1^2 \sum_0^\infty{}_n \sum_0^\infty{}_m \frac{a_n b_m + a_m b_n}{(a_m a_n - b_m b_n)^2} \right.$$

$$7, \quad - 2\alpha_1\alpha_2 \sum_0^\infty{}_n \sum_0^\infty{}_m \frac{a_n b_m' + a_m' b_n}{(a_m' a_n - b_m' b_n)^2}$$

$$\left. + \alpha_2^2 \sum_0^\infty{}_n \sum_0^\infty{}_m \frac{a_n' b_m' + a_m' b_n'}{(a_m' a_n' - b_m' b_n')^2} \right\}.$$

Hierin ist die rechte Seite offenbar so zu verstehen, dass, wenn sich für K ein positiver Werth herausstellt, die Kraft K die bewegliche Kugel der festen zu nähern strebt, wenn ihr Werth aber negativ ist, sie die bewegliche Kugel von der festen zu entfernen sucht. Nennen wir die in §. 3. Cap. V. berechnete Grösse der Anziehung oder Abstossung zweier Kugeln allgemein F, und geben dem F das positive Vorzeichen, wenn sie die bewegliche Kugel A der unbeweglichen B zu nähern sucht, im entgegengesetzten Falle aber das negative Vorzeichen, so ist allgemein $F + K$ die Kraft, mit welcher sich die bewegliche Kugel A der unbeweglichen B zu nähern sucht und die z. B. in der Torsionswage aufgehoben werden muss durch die Torsion des Aufhängungsdrahtes des Wagebalkens.

Besitzen die beiden Kugeln, wie es in der Torsionswage gewöhnlich der Fall ist, gleichen Radius, so giebt die Gleichung 7, wenn wir noch $a = b = 1$ setzen

$$K = -k \Big\{ \alpha_1^2 \sum_0^\infty {}_n \sum_0^\infty {}_m \frac{a_n b_m + a_m b_n}{(a_m a_n - b_m b_n)^2}$$

$$8, \quad - 2\alpha_1 \alpha_2 \sum_0^\infty {}_n \sum_0^\infty {}_m \frac{a_n b_m' + a_m' b_n}{(a_m' a_n - b_m' b_n)^2}$$

$$+ \alpha_2^2 \sum_0^\infty {}_n \sum_0^\infty {}_m \frac{a_n' b_m' + a_m' b_n'}{(a_m' a_n' - b_m' b_n')^2} \Big\},$$

wenn

$$a_n = \frac{\alpha'^n - \alpha''^n}{\alpha' - \alpha''} = \frac{\alpha'^{n+1} - \alpha''^{n+1}}{\alpha' - \alpha''} = b_n'$$

$$b_n = c\, \frac{\alpha'^n - \alpha''^n}{\alpha' - \alpha''}$$

$$a_n' = c\, \frac{\alpha'^{n+1} - \alpha''^{n+1}}{\alpha' - \alpha''} = b_{n+1}$$

$$b_n' = \frac{\alpha'^{n+1} - \alpha''^{n+1}}{\alpha' - \alpha''} + \frac{\alpha'^n - \alpha''^n}{\alpha' - \alpha''} = a_n$$

und α' und α'' die grössere und kleinere Wurzel der quadratischen Gleichung $\alpha^2 - (c^2 - 2)\alpha + 1 = 0$ sind.

Für den Fall, dass sich beide Kugeln berühren, sind die Gleichungen 7, und 8, unbrauchbar, man muss vielmehr, um diesen Fall zu untersuchen, die elektrische Dichtheit ϱ in anderer Form darstellen und zwar in einer Form, die erhalten wird aus einer Darstellung von V_a, die analog derjenigen ist, die in der Gleichung 55*, §. 6. Cap. III. nur für Punkte der Centrallinie galt. Da hierzu ein grösserer Formelapparat nöthig ist, derart, dass bei den in §. 1. angenommenen vereinfachenden Bedingungen die Genauigkeit der Rechnung die aufgewendete Mühe nicht lohnen würde, so unterlassen wir es hier, den in Rede stehenden Fall genauer zu untersuchen.

Die Wirkung der Kraft K muss ausser in anderen Fällen auch deutlich hervortreten, wenn die bewegliche Kugel A abgeleitet ist, in diesem Falle entsteht nämlich aus der Gleichung 8, $a = b = 1$ vorausgesetzt, da jetzt $\alpha_1 = 0$

$$9, \quad K = -k\alpha_2^2 \sum_0^\infty {}_n \sum_0^\infty {}_m \frac{a_n' b_m' + a_m' b_n'}{(a_m' a_n' - b_m' b_n')^2}.$$

Es existirt eine in dieser Art angestellte Versuchsreihe

von Snow Harris, die Thomson[1]) erwähnt und an welcher letzterer die Genauigkeit seiner Rechnung (vergl. die erste der Tafeln am Ende von §. 3. Cap. V.) prüft. Wir stellen hier erst die Ergebnisse der Rechnung Thomson's mit den Ergebnissen des Experimentes zusammen.

Von Snow Harris beobachtet		Von Thomson berechnet	Differenz
c	Grösse der Anziehung		
2,3	15	32917 oder 15	0,00
2,5	8,25	17432 - 7,94	0,31
2,8	4,6	9174 - 4,18	0,42
3,0	3,5	6592 - 3,00	0,50

Die steigenden Differenzen erklärt Thomson aus der Gegenwart elektrischer Massen, die nicht mit der Rechnung unterworfen wurden. Berechnet man aber K nach der Gleichung 9, indem man die entsprechenden Werthe von α_2 aus der ersten Thomson'schen Tabelle am Ende von §. 3. Cap. V. und zwar aus der α_1 überschriebenen Colonne entnimmt, so erhält man für die verschiedenen c der Reihe nach die Werthe der Grösse der Anziehung: 0,32917 — k. 1,19363; 0,17432 — k. 0,54617; 0,09174 — k. 0,25365; 0,06592 — k. 0,17320; ist M der Modulus, um das der Rechnung zu Grunde gelegte Kraftmaass auf das zurückzuführen, nach welchem Snow Harris beobachtete, so müssen die eben hingeschriebenen Werthe mit M multiplicirt gleich den von Snow Harris beobachteten Kräften sein. Bildet man die hierdurch entstehenden Gleichungen und benützt den Fall $c = 2,3$ um M zu eliminiren, so erhält man aus den übrigen Gleichungen der Reihe nach die Werthe für Mk

$$3{,}565;\ 5{,}309;\ 7{,}534.$$

Diese mit wachsendem c ebenfalls zunehmenden Werthe für Mk sprechen sich deutlich in dem Sinne aus, dass auch noch die zwischen den beiden sich anziehenden Kugeln gelegenen Luftschichten elektrisch geworden waren, indem ihre Wirkung mit der Grösse dieser Luftschicht ebenfalls wachsen musste. Denkt man sich die Grösse dieser Luftschicht

1) On the mathematical theory of electricity in Equilibrium. Philos. Magaz. 4. ser. Vol. VII.

proportional der dritten Potenz des zugehörigen Werthes von c, und dividirt die hingeschriebenen Werthe von Mk resp. durch $(2,5)^3$; $(2,8)^3$, 3^3, so erhält man für $\frac{Mk}{c^3}$ die nahezu constanten Werthe

$$0{,}228;\ 0{,}242;\ 0{,}279.$$

Da wir es hier mit bewegter Elektricität zu thun haben, nämlich der der bewegten elektrischen Lufttheilchen, so gehört eine genauere mathematische Untersuchung darüber der Elektrodynamik an. Nimmt man übrigens für Mk aus den obigen drei Werthen das arithmetische Mittel 5,469 als richtig an, so erhält man aus der Gleichung, die für den Fall $c = 2{,}3$ gilt, für M den Werth 65,4 und damit aus den obigen Werthen von Mk der Reihe nach für k die Werthe

$$0{,}054;\ 0{,}083;\ 0{,}115,$$

welche einen Anhaltspunkt gewähren, um über die Beschaffenheit der Luft als elektrischer Leiter oder Nichtleiter urtheilen zu können. —

§. 3.
Vereinfachung der elektrostatischen Grundgesetze.

In §. 1. Cap. II. sind die einzelnen elektrostatischen Grundgesetze, wie sie mit Hülfe des Experimentes ohne weiteres nachgewiesen werden können, aufgezählt worden. Ohne weiteres baute sich auf diese, ohne irgend welche neue Annahme über das Wesen der Elektricität, auf rein mathematischem Wege, die ganze Theorie der Elektrostatik auf in einer Weise, dass kein einziges Experiment den Resultaten der Theorie entgegen war. Da wir alle die der Theorie zu Grunde liegenden Voraussetzungen in §. 1. Cap. II. in prägnanter Form vor uns haben, so können wir es hier wohl noch versuchen, uns auch dem am Anfange des eben genannten Paragraphen hingestellten Zweck aller Naturwissenschaft einen Schritt zu nähern.

Die auffälligsten Voraussetzungen über das Wesen der Elektricität liegen offenbar in dem, was unter 2, und 3, §. 1.

Cap. II. genannt wurde, denn es widerstrebt unseren Anschauungen, einer wirklichen realen Masse Qualitäten beizulegen, die durch die mathematischen Zeichen + und — so vollständig ausgedrückt werden, dass man mit den so qualificirten Grössen rechnen kann, wie mit rein algebraischen Grössen; muss man doch selbst bei algebraischen Grössen, die durch ihr Vorzeichen unterschieden werden, sehr wohl ihren absoluten Werth unterscheiden und wird man doch in der Algebra auf die Vorzeichen erst dadurch geführt, dass man die Aufgabe der Subtraction auch in dem Falle auszuführen verlangt, wenn der absolute Werth des Subtrahenden grösser ist als der absolute Werth des Minuenden. Dazu kommt das wichtige Gesetz unter 3, welches die Basis der ganzen Lehre von der Influenzelektricität war, während man doch nach dem Gesetze 1, urtheilen sollte, dass ein ungeladener elektrischer Leiter in der Nähe eines elektrischen gar keine Aenderung des elektrischen Gleichgewichtes veranlassen sollte, weil in ihm gar keine Elektricität vorhanden, also auch durch ihn keine elektrische Kraftwirkung verursacht werden kann.

Als die Optik durch die Interferenzerscheinungen Grimaldi's erfuhr, dass auch dem Lichte Qualitäten beizulegen seien, welche analog dem + und — der Algebra waren, erklärte man das Wesen des Lichtes durch die bekannten Schwingungen des Aethers. In ähnlicher Weise hat man auch das Wesen der Elektricität zu erklären versucht, so Subic[1]) durch molekulare Stösse, Hankel[2]) durch circulare Schwingungen des Aethers. Indem wir hier nur die in §. 1. Cap. II. genannten Voraussetzungen über das Wesen der statischen Elektricität berücksichtigen, suchen wir nur die an der genannten Stelle unter 2, und 3, angeführten Eigenschaften der Elektricität auf ein einziges Gesetz zurückzuführen, das zur Erklärung der elektrodynamischen Erscheinungen noch genügenden Spielraum lässt.

In §. 1. haben wir gesehen, dass Elektricität nicht ohne ponderables Substrat existiren kann, wir müssen daraus

1) Sitzungsberichte der Wiener Academie Bnd. 43.

2) Poggendorff Annal. Bnd. 126. pag. 440.

folgern, dass eine Anziehung bestehe zwischen den ponderablen Theilchen eines elektrischen Körpers und seiner Elektricität, während sich die gleichartigen Elektricitätstheilchen abstossen, ausserdem wirken noch die ponderablen Massentheilchen anziehend auf einander. Geschehen diese Anziehungen und Abstossungen sämmtlich nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze, so hat man zwischen den ponderablen Massentheilchen M, M', und den an ihnen haftenden Elektricitätsmengen E und E' die Kraftwirkung P

$$1, \quad P = \frac{\alpha MM' + \beta (ME' + M'E) - \gamma EE'}{r^2},$$

wenn man mit α, β und γ Constanten bezeichnet, deren Werthe nur abhängen von dem Maassstabe, nach welchem die Kraft P gemessen wird, und wenn wir uns die räumliche Ausdehnung von M, M', E, E' so klein denken, dass die Entfernung r gemessen werden kann durch die Entfernung zweier, innerhalb dieser Massen gelegener Punkte, etwa der Schwerpunkte der Massen.

Sind nun die beiden Massen M und M' unelektrisch, so muss die Kraft P identisch werden mit der Schwere dieser Massen, oder P muss die Form annehmen

$$P = \mu . \frac{MM'}{r^2}.$$

Diese Form von P kann aber aus 1, in doppelter Weise entstehen, nämlich einmal, wenn man $E = E' = 0$ setzt, wodurch $\mu = \alpha$ wird, diese Annahme widerspricht aber der vorhin bemerkten Influenzwirkung, sodann aber auch, wenn

$$2, \quad \alpha + \beta . \left(\frac{E'}{M'} + \frac{E}{M}\right) - \gamma . \frac{E'}{M'} \cdot \frac{E}{M} = \text{Const.} = \mu.$$

Die Gleichung 2, ist aber leicht erfüllbar und drückt aus, dass im sogenannten unelektrischen Zustande die Körper nicht wirklich elektricitätsfrei sind, sondern dass sie nur in diesem Zustande in jedem ihrer kleinsten Theilchen mit einer solchen Elektricitätsmenge behaftet sind, die proportional ist der ponderablen Masse des Theilchens, wir wollen sie dann neutral elektrisch nennen. Setzen wir demnach $\frac{E'}{M'} = k'$, $\frac{E}{M} = k$, so folgt aus 2,

$$3, \quad \alpha + \beta(k + k') - \gamma k k' = \mu.$$

Setzen wir anstatt des neutral elektrischen Massentheilchens M' ein anderes M'', das im neutral elektrischen Zustande die Elektricitätsmenge E'' enthält, derart dass $\frac{E''}{M''} = k''$, so erscheint jetzt an Stelle der Gleichung 3,

$$4, \quad \alpha + \beta(k + k'') - \gamma k k'' = \mu$$

und durch Subtraction von 3, und 4,

$$5, \quad (k' - k'')(\beta - \gamma k) = 0.$$

Die Gleichung 5, muss erfüllt sein, welcher Art auch das erste Massentheilchen M sein mag, oder welchen Werth auch k haben mag; es ergiebt sich daher aus ihr

$$6, \quad k' = k''.$$

Die Gleichung 6, besagt: **Befindet sich irgend ein Körper im neutral elektrischen Zustande, so enthält jedes kleinste Theilchen desselben eine Elektricitätsmenge, die allein der Masse des Theilchens proportional ist.**

Vermehrt sich nun die Elektricitätsmenge des Massentheilchens M, nämlich E, um e, die des Massentheilchens M', nämlich E' um e', so ist die Gesammtkraft P', mit der die Theilchen auf einander einwirken

$$P' = \frac{\alpha M M' + \beta(M[E' + e'] + M'[E + e]) - \gamma(E + e)(E' + e')}{r^2}$$

Oder

$$7, \quad P' = \frac{\alpha M M' + \beta(M E' + M' E) - \gamma E E'}{r^2} + \frac{\beta(M e' + M' e) - \gamma(E e' + E' e)}{r^2} - \gamma \frac{e e'}{r^2}.$$

Der erste Bruch der rechten Seite dieser Gleichung ist nichts anderes als die gegenseitige Kraftwirkung, wenn beide Massentheilchen M und M' sich im neutral elektrischen Zustande befinden, wir bezeichnen diese Kraft kurz mit G. Setzen wir ferner im zweiten Bruch der rechten Seite der Gleichung 7, unter Anwendung des aus der Gleichung 6,

gezogenen Resultates $M = \frac{1}{k} E$; $M' = \frac{1}{k} E'$, so geht die Gleichung 7, über in

$$8, \quad P' = G + \left(\frac{\beta}{k} - \gamma\right)\left(\frac{Ee' + E'e}{r^2}\right) - \gamma \frac{ee'}{r^2}.$$

Nun hängt aber, wie das Experiment lehrt, die gegenseitige Einwirkung zweier Körper auf einander nicht davon ab, wie viel jeder einzelne Körper im neutral elektrischen Zustande Elektricität enthält, folglich ist in 8,

$$\frac{\beta}{k} - \gamma = 0$$

oder

$$9, \quad \beta = \gamma k.$$

Die linke Seite der Gleichung 9, enthält die Kraftwirkung zwischen einem ponderablen Massentheilchen und einem Elektricitätstheilchen, wenn die Massen beider der Einheit gleich sind und wenn sich beide in der Einheit der Entfernung von einander befinden. Die Gleichung 9, besagt alsdann: Die Kraft, mit welcher sich die Einheit der ponderablen Masse und der Elektricität anziehen, wenn beide sich in der Einheit der Entfernung von einander befinden, ist gleich dem Producte aus dem constanten Verhältniss der Elektricitätsmenge zur ponderablen Masse im neutral elektrischen Zustande, multiplicirt in die Kraft, mit welcher sich zwei Einheiten von Elektricität in der Entfernung 1, abstossen.

Hieraus erklärt es sich, warum ein elektrischer Körper auch im Vacuum elektrisch bleiben kann und zugleich folgt, dass die in §. 1. unter δ gegebene Antwort der dort gestellten Frage, warum ein isolirter elektrischer Körper elektrisch bleibe, eine unnöthige Annahme machen muss und daher von Seiten der Elektrostatik zurückzuweisen ist.

Mit Hülfe der Gleichung 9, geht nun 8, über in

$$10, \quad P' = G - \gamma \frac{ee'}{r^2}.$$

Hieraus folgt aber, wenn wir nur die Kraft p berücksichtigen, welche dem elektrischen Zustande ihre Entstehung verdankt

$$11, \quad p = -\gamma \frac{ee'}{r^2}$$

Die Gleichung 11, enthält nun aber genau die beiden in §. 1. Cap. II. unter 2, und 3, hingestellten Voraussetzungen, auf die sich neben der unter 1, genannten das ganze Gebäude der Elektrostatik allein stützte. Diese letztere Voraussetzung kann aber die Elektrostatik nicht weiter prüfen, weil sie der Elektrodynamik angehört.

Mit Hülfe der Gleichungen 6, und 9, geht noch die Gleichung 4, über in

$$12, \quad \mu = \alpha + \beta k,$$

welche besagt, dass die gewöhnlich unter Gravitation oder Schwere verstandene Eigenschaft der Körper bestehe aus einer Doppelwirkung, nämlich der wirklichen Gravitation der ponderablen Theilchen der Körper und der gegenseitigen elektrischen Einwirkung.

Anmerkung: Wir sind hier unvermerkt auf die Franklin'sche Hypothese über das Wesen der Elektricität zurückgekommen. Aepinus, welcher in seinem Tentamen theoriae electricitatis 36 diese Franklin'sche Hypothese analytisch verfolgte, kam, weil er die oben mit G bezeichnete Kraft gleich Null setzte, auf das Resultat, dass sich die ponderablen Massentheilchen eines Körpers gegenseitig abstossen, ein Resultat, das er gegenüber dem vielfach durch die Beobachtung ausgezeichnet bestätigten Newton'schen Gravitationsgesetze damit vertheidigte, dass wir nicht die gegenseitige Kraftwirkung der ponderablen Massen beobachten können, sondern immer die Gesammtheit der Wirkungen zwischen den ponderablen Massen und den an ihnen haftenden Elektricitätsmengen wahrnehmen. Mousson giebt in seiner „Physik auf Grundlage der Erfahrung Theil II. §. 1043 und 1044“ dieselbe Erklärung der elektrostatischen Grundgesetze, die auch von uns eben vorgetragen wurde, nur identificirt er ohne weiteres die Elektricität mit dem Lichtäther, was wir hier, bei dem in sich geschlossenen Gebiete der Elektrostatik, mit welcher wir es allein zu thun hatten, nicht thun konnten, so lange als noch irgend ein Umstand der Elek-



trodynamik hindernd entgegentritt, was allerdings vielfach der Fall zu sein scheint. Uebrigens hatte auch schon Redtenbacher in seinem Dynamidensystem dieselbe Grundanschauung ausgesprochen, wie sie Mousson vorträgt. Die hierdurch angedeutete Verwandtschaft der Elektricitätslehre mit den schönsten Capiteln der Physik, nämlich den der Wärme und des Lichtes giebt der vorgetragenen Lehre über das Wesen der Elektricität einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit.

§. 4.
Consequenzen aus der in §. 3. vorgetragenen Lehre über das Wesen der Elektricität.

Die in den frühern Capiteln vorgetragene Lehre über die Elektrostatik konnte nur auf die statischen Verhältnisse von Elektricitätsmengen Rücksicht nehmen, die bereits auf einzelnen Leitern erregt waren, weil sie allein die in der Gleichung 11, §. 3. mit p repräsentirte Kraft berücksichtigen konnte. Diess musste so lange sehr angenährt richtige Resultate ergeben, als die mit Elektricität geladenen Leiter noch in grösserer Entfernung von einander sich befanden, weil in Wirklichkeit die in der Gleichung 10, §. 3. mit G bezeichnete Kraft gegenüber der mit p bezeichneten in diesem Falle sehr klein ist. Die in den frühern Capiteln vorgetragene Lehre konnte aber keinen Aufschluss darüber geben, wie überhaupt Elektricität entstehen könne. Diess kann aber sehr wohl durch die Lehrsätze des §. 3. geschehen, weil nach diesem auch dann Elektricitätsmengen berücksichtigt werden müssen, wenn die Körper, an denen sie haften, sich im neutral elektrischen Zustande befinden.

Bilden wir nämlich die Potentialfunction V_1 der in einem gegebenen neutral elektrischen Körper vorhandenen ponderablen Masse und Elektricität, so muss auch diese im Falle des elektrischen Gleichgewichtes im Ganzen inneren Raume des Körpers denselben constanten Werth α_1 aufweisen (genauer noch ist zu sagen, in allen den Zwischenräumen des Körpers, die nicht von ponderablen Molekülen vollständig ausgefüllt sind), der im Allgemeinen nur sehr

wenig von Null verschieden sein kann. Für einen zweiten Körper sei die ebenso verstandene Potentialfunction $V_2 = \alpha_2$. Befinden sich beide Körper in grösserer Entfernung von einander in isolirter Stellung, so ist in ihnen die Grösse der Potentialfunction wenig von α_1 und α_2 verschieden, so dass eine Wahrnehmung freier Elektricität dem Experimente entgeht. Befinden sich hingegen beide Körper einander sehr nahe, ohne sich zu berühren, so kann die Gesammtpotentialfunction schon einen merklich von α_1 und α_2 verschiedenen Werth in den beiden Körpern annehmen, so dass nun freie Elektricität entwickelt werden muss. Hiermit stimmt überein ein Versuch von Gassiot[1]), welcher eine Zink- und Kupferplatte gegenseitig bis auf 0,25 Millimeter näherte und beobachtete, dass ein Goldblättchen, welches zwischen zwei Goldplatten aufgehängt war, von denen die eine mit der Zink-, die andere mit der Kupferplatte leitend verbunden war, nach der mit der Zinkplatte verbundenen Goldplatte hin ausschlug, wenn die Zink- und Kupferplatte wieder von einander entfernt wurden und wenn dem Goldblättchen zuvor negative Elektricität mitgetheilt worden war. Die zwischen der Zink- und Kupferplatte befindliche Luftschicht musste hierbei nothwendig einen Austausch der Elektricitäten beider Platten übernommen haben, weil sonst nach der wieder herbeigeführten Entfernung derselben von einander die entstandenen freien Elektricitäten sich wieder zum neutralen Zustande hätten vereinigen müssen. Hiermit stimmt auch überein der Versuch Volta's[2]), welcher über eine horizontale Silberplatte drei Silberspitzen bis höchstens auf $^1/_{10}$ Linie hervorragen liess und darauf eine Zinkplatte legte. Beide Platten erwiesen sich nach wieder aufgehobener Berührung elektrisch, während keine Elektricität beobachtet werden konnte, wenn beide Platten sich in nur einem kleinen Theile so berührten, dass die eine Platte weit über die andere hinausragte.

Am deutlichsten muss sich nun Elektricität zeigen, wenn die beiden Körper bis zur Berührung einander genähert

1) Philosoph. Magaz. Bnd. 25. 1844.

2) Collezione dell' opere II_2. 59. Lettere a Green §. 73.

werden, indem die Gesammtpotentialfunction in beiden Körpern alsdann denselben constanten Werth aufweisen muss.

Ein tieferes Eingehen in den Process der Entstehung der Elektricität kann nur dann genaue Rechnungsresultate geben, wenn die Molekularverhältnisse der einzelnen Körper bekannt sind, da namentlich die Grenzschichten der Körper wirksam auftreten. Nur soviel ist ohne weiteres klar und mag noch hier erwähnt werden, dass, wenn nicht geflissentlich Elektricitätsmengen von den auf einander einwirkenden Körpern hinweggenommen werden, immer die Summe der Elektricitäten erhalten bleibt, oder, was dasselbe sagt, immer gleich viel positive und negative Elektricität erzeugt wird.

Literatur:

Die Betrachtungen in den ersten beiden Paragraphen dieses Capitels finden sich hier zum ersten Male.

Die Literatur, welche dem Inhalte des §. 3. vorausgegangen ist, ist selbst am Schlusse dieses Paragraphen der Hauptsache nach zusammengestellt worden.

Die Literatur, welche dem §. 4. zu Grunde liegen könnte, ist in ihren Voraussetzungen durchgängig zu weit gegangen, als dass sie hier berücksichtigt werden konnte.

